∽ Corrigé du baccalauréat ES Liban 30 mai 2011 ∾

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** f est définie si $1 - x^2 > 0 \iff x^2 - 1 < 0 \iff (x+1)(x-1) < 0$; le trinôme est positif sauf entre ses racines -1 et 1.
   f est donc définie sur $]-1\ ;\ 1[$.

   b. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \ln\frac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4 = \ln 3 - \ln 2^2 = \ln 3 - 2\ln 2$.

2. **a.** $\ln(\ln x) > 0 \iff \ln(\ln x) > \ln 1 \iff \ln x > 1$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff \ln x > \ln \mathrm{e} \iff x > \mathrm{e}$.
   L'ensemble des solutions est l'intervalle $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.

   b. Pour $x > 1$, on a $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x\ln x}$.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A Étude statistique et interpolation de données

1. La calculatrice donne, coefficients arrondis au dixième, $y = -0,2x + 30$.
2. 1999 correspond au rang 7 ; selon cet ajustement, le taux d'emploi des seniors en 1999 sera

$$-0,2 \times 7 + 30 = -1,4 + 30 = 28,6.$$

3. 2010 correspond au rang 18 ; selon cet ajustement, le taux d'emploi des seniors en 2010 sera

$$-0,2 \times 18 + 30 = -1,4 + 30 = 26,4.$$

   Selon cet ajustement la France n'atteindra pas son objectif.

Partie B Interpolation de données à l'aide d'un second modèle

1. 2010 correspond à $n = 10$; le taux d'emploi des seniors sa alors :
   $29,9 \times 1,037^{10} \approx 43$.
2. Il faut résoudre l'inéquation :
   $29,9 \times 1,037^n \geqslant 50 \iff 1,037^n \geqslant \dfrac{50}{29,9} \iff$
   $n \ln 1,037 > \ln\dfrac{50}{29,9} \iff n > \dfrac{\ln\frac{50}{29,9}}{\ln 1,037} \approx 14,15$.
   Le plus naturel solution est donc $n = 15$, soit en 2015.

Partie C Extrapolation de données selon un troisième modèle

1. a et b doivent vérifier le système : $\left\{\begin{array}{rcl} a\ln 10 + b & = & 31,9 \\ a\ln 15 + b & = & 38,1 \end{array}\right.$.

2. On résout le système :
$\begin{cases} a\ln 10 + b &= 31,9 \\ a\ln 15 + b &= 38,1 \end{cases} \Rightarrow$ (par différence) $a(\ln 15 - \ln 10) = 6,2 \iff a\ln 1,5 = 6,2 \iff$
$a = \dfrac{6,2}{\ln 1,5}$.
La calculatrice donne $a = \dfrac{6,2}{\ln 1,5} \approx 15,29$. Ensuite $b = 31,9 - a\ln 10 = 31,9 - \ln 10 \times \dfrac{6,2}{\ln 1,5}$
$\approx -3,309$.
Dans la suite, on admettra que $a = 15,3$ et $b = -3,3$.
3. On a donc $f(x) = 15,3\ln(x+1) - 3,3$.
Il faut résoudre l'inéquation :
$15,3\ln(x+1) - 3,3 \geqslant 50 \iff 15,3\ln(x+1) \geqslant 53,3 \iff \ln(x+1) \geqslant \dfrac{53,3}{15,3} \iff (x+1) \geqslant \mathrm{e}^{\frac{53,3}{15,3}} \iff$
$x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{53,3}{15,3}} - 1 \approx 31,5$.
Le plus petit naturel solution est $n = 32$ qui correspond à 2024.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de l'une de ses tangentes.

1. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :
$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
   - $f(0) = \mathrm{e}^{-0} = 1$;
   - $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, donc $f'(0) = -\mathrm{e}^{-0} = -1$.

   Donc l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y - 1 = -x \iff y = -x + 1$.
2. **a.** Pour tout x réel, $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - (-x+1) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$, donc
$h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
   b. $h'(x) > 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x} > 0 \iff \mathrm{e}^{-x} < 1 \iff -x < \ln 1 \iff 0 < x$; de même :
$h'(x) < 0 \iff x < 0$ et $h'(x) = 0 \iff x = 0$.
   c. Les résultats de la question précédente montrent que :
   - la fonction h est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et
   - croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Les deux questions précédentes ont montré que la fonction a pour minimum $h(0) = 1 - 1 = 0$, donc la fonction est positive pour tout réel ; or $h(x) \geqslant 0 \iff f(x) - g(x) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant g(x)$ ce qui signifie que la courbe est au dessus de sa tangente, sauf pour $x = 0$ où les deux courbes sont tangentes.

Partie B Calcul d'aire

1. On a vu que la fonction h est positive en particulier sur $[0\,;\,1]$.
Un e primitive de la fonction h sur $[0\,;\,1]$ est la fonction définie par :
$x \longmapsto H(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x$, donc :
$\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = H(1) - H(0) = -\mathrm{e}^{-1} + \frac{1^2}{2} - 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0} + \frac{0^2}{2} - 0\right) = -\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

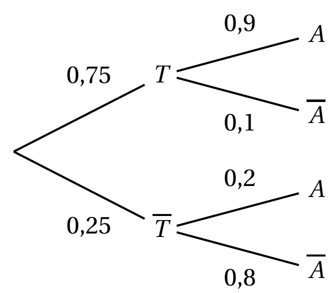
2. **a.** On découpe l'intervalle en deux : de 0 à 1 puis de 1 à a.
La fonction f étant positive sur $[0~;~a]$, on sait que l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de f, la droite Δ et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.
Ensuite l'aire de la surface limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = 1$ et $x = a$ est égale à $\displaystyle\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
Donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$;
$\mathscr{A} = H(1) - H(0) + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-a}$.

   b. On sait que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-a} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   a. $p(T \cap A) = p(T) \times p_T(A) = 0,75 \times 0,9 = 0,675$.
   b. $p\left(T \cap \overline{A}\right) = p(T) \times p_T\left(\overline{A}\right) = 0,75 \times 0,1 = 0,075$.
   c. $p\left(\overline{T} \cap A\right) = p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(A) = 0,25 \times 0,2 = 0,05$.
   d. $p\left(\overline{T} \cap \overline{A}\right) = p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}\left(\overline{A}\right) = 0,25 \times 0,8 = 0,2$.
3. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
$p(A) = p(T \cap A) + p\left(\overline{T} \cap A\right) = 0,675 + 0,05 = 0,725$.
   b. Il faut calculer $p_A(T) = \dfrac{p(A \cap T)}{p(A)} = \dfrac{0,675}{0,725} = \dfrac{675}{725} = \dfrac{27}{29} \approx 0,931$.
4. On a $p(S) = p\left(T \cap \overline{A}\right) + p\left(\overline{T} \cap A\right) = 0,075 + 0,05 = 0,125$.
5. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,125$.
Calculons la probabilité qu'aucun des trois ne soit surpris ; elle est égale à $(1 - 0,125)^3$, donc la probabilité qu'au moins un élève soit surpris est égale à :

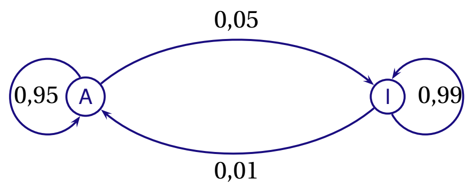
$$1 - (1 - 0,125)^3 \approx 0,330.$$

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A État stable d'un graphe probabiliste

1.



2. Au départ 92 % des des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients internet, donc $P_0 = \begin{pmatrix}0,92 & 0,08\end{pmatrix}$.

3. a. On a $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix}0,92 & 0,08\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05\\0,01 & 0,99\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,8748 & 0,1252\end{pmatrix}$. Soit en arrondissant au centième $P_1 = \begin{pmatrix}0,87 & 0,13\end{pmatrix}$.

b. En 2015 l'état probabiliste sera :

$P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix}0,92 & 0,08\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05\\0,01 & 0,99\end{pmatrix}^5 \approx \begin{pmatrix}0,72 & 0,28\end{pmatrix}$.

Il y aura environ 72 % clients d'agence et 28 % clients internet.

4. Les termes de la matrice de transition sont non nuls, donc l'état P_n converge vers un état stable P tel que $P = P \times M$.

Avec a clients d'agence et i clients internet on aura $P = \begin{pmatrix}a & i\end{pmatrix}$.

On aura donc : $\begin{pmatrix}a & i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05\\0,01 & 0,99\end{pmatrix}$ et $a + i = 1$, donc a et i vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 0,95a + 0,01i\\ i & = & 0,05a + 0,99i\\ a+i & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,05a - 0,01i & = & 0\\ -0,05a + 0,01i & = & 0\\ a+i & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 5a - i & = & 0\\ a+i & = & 1\end{array}\right. \Rightarrow$$

(par somme) $6a = 1 \iff a = \dfrac{1}{6}$ et par suite $i = \dfrac{5}{6}$.

Conclusion $P = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{6} & \dfrac{5}{6}\end{pmatrix}$.

Partie B Étude de la limite d'une suite récurrente

1. a. $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix}a_{n+1} & i_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & i_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,95 & 0,05\\0,01 & 0,99\end{pmatrix} \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0,95a_n + 0,01i_n\\ i_{n+1} & = & 0,05a_n + 0,99i_n\end{array}\right.$$

En particulier : $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01i_n$.

b. On a donc $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01i_n$ et compte tenu de $a_n + i_n = 1 \iff$ $i_n = 1 - a_n$, on obtient :

$a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01(1 - a_n) = 0,95a_n + 0,01 - 0,01a_n = 0,94a_n + 0,01$.

2. a. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{1}{6} = 0,94a_n + 0,01 - \dfrac{1}{6} = 0,94a_n - \dfrac{0,94}{6} = 0,94\left(a_n - \dfrac{1}{6}\right) = 0,94u_n$.

Or $u_{n+1} = 0,94u_n$ pour tout entier naturel n signifie que la suite (u_n) est une suite, géométrique de raison 0,94 et de premier terme $u_0 = a_0 - \dfrac{1}{6} = 0,92 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{6 \times 0,92 - 1}{6} = \dfrac{113}{150}$.

b. On sait qu'alors pour tout naturel n, $u_n = \dfrac{113}{150} \times 0,92^n$.

c. Or $u_n = a_n - \dfrac{1}{6} \iff a_n = u_n + \dfrac{1}{6} = \dfrac{113}{150} \times 0,94^n + \dfrac{1}{6}$.

d. Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{1}{6}$.

Dans un certain temps il y aura un client d'agence pour cinq clients internet.

ANNEXE

Exercice 3