

Durée : 3 heures

∞ Corrigé du baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion ∞
21 juin 2018

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

La variable X suit la loi normale de paramètres $\mu = 45$ et $\sigma = 12$.

1. a. $P(X = 10) = 0$ car X suit une loi à densité, donc la probabilité (calculée avec une intégrale) que la variable X soit égale à une n'importe quelle valeur choisie, est toujours égale à zéro.
 - b. L'espérance de la loi normale est $\mu = 45$. La fonction de densité d'une telle loi est symétrique par rapport à un axe vertical d'équation $x = 45$. Donc $P(X \leq 45) = P(X \geq 45) = 0,5$.
 - c. $\mu = 45$ et $\sigma = 12$ donc $\mu - 2\sigma = 21$ et $\mu + 2\sigma = 69$.
Donc $P(21 \leq X \leq 69) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.
 - d. On sait que $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$, soit ici $P(45 - 2 \times 12 \leq X \leq 45 + 2 \times 12) \approx 0,95$ ou $P(21 \leq X \leq 69) \approx 0,95$, d'où par symétrie $P(21 \leq X \leq 45) \approx \frac{0,95}{2}$, donc $P(21 \leq X \leq 45) \approx 0,475$.
2. À l'aide de la calculatrice, $P(30 \leq X \leq 60) \approx 0,789$.
 3. À l'aide de la calculatrice (inversion de la loi normale), $P(X \leq a) = 0,30 \iff a \approx 38,71$ soit environ 39 minutes. Donc la probabilité qu'un client passe moins de 39 minutes est égale à 0,30.

Partie B

1. On prend un échantillon de taille 300 donc $n = 300$. Une étude a montré que 89 % des clients sont satisfaits donc la probabilité est $p = 0,89$.
 $n = 300 \geq 30$, $np = 267 \geq 5$ et $n(1 - p) = 33 \geq 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :
$$I_{300} = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$
$$= \left[0,89 - 1,96\sqrt{\frac{0,89 \times 0,11}{300}}; 0,89 + 1,96\sqrt{\frac{0,89 \times 0,11}{300}} \right] \approx [0,855; 0,925]$$
2. La fréquence de clients satisfaits est : $f = \frac{286}{300} \approx 0,953$
3. Si on suppose que le taux de satisfaction reste stable à que 89 %, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % reste identique. Or $f \notin I_{300}$ donc au risque d'erreur de 5 %, donc on ne peut pas dire que le taux de satisfaction est resté stable.

Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La probabilité $p_{\overline{F}}(S)$ est la probabilité que l'on interroge un élève faisant du sport sachant que cet élève n'est pas une fille (et donc est un garçon). **Réponse a)**
2. Formule de Bayes : $P_{\overline{F}}(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(\overline{F})} = \frac{P_S(F) \times P(S)}{P(F)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,47} \approx 0,255$. **Réponse b)**

Partie B

1. L'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $a = 1$ est : $y = g'(a)(x - a) + g(a)$.
La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[-1; 4]$: $g'(x) = -3x^2 + 6x$.
Donc $g'(1) = 3$ et $g(1) = 1$. L'équation de la tangente est : $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$. **Réponse b)**
2. Avec la calculatrice, on calcule la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1; a]$ ($a \geq -1$) : $\frac{1}{a - (-1)} \int_{-1}^a g(x) dx$.
- Pour $a = 0$: $\frac{1}{0 - (-1)} \int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 g(x) dx = \frac{1}{4}$.
- Pour $a = 1$: $\frac{1}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 g(x) dx = 0$. **Réponse b)**

Exercice 3**5 points****Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L**

1. Le niveau augmente en hauteur de 6 % puis baisse de 15 cm d'un jour à l'autre. Augmenter de 6 % revient à multiplier par 1,06.
- a. Le 2 janvier 2018, $u_1 = 1,06 \times u_0 - 15 = 1,06 \times 605 - 15 = 626,3$.
- b. Pour tout entier naturel n , on note respectivement par u_n et u_{n+1} les niveaux du barrage pour les jours n et $n + 1$. Le niveau augmente de 6 % puis baisse de 15, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06 \times u_n - 15$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$
- a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1,06u_n - 15 - 250 = 1,06u_n - 265 = 1,06 \times \left(u_n - \frac{265}{1,06}\right) = 1,06 \times (u_n - 250) = 1,06 \times v_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 355$.
- b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 355 \times 1,06^n$. De plus $u_n = v_n + 250$
donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.
3. a. Cherchons la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.
La raison de la suite géométrique (v_n) est supérieure à 1 et $v_0 > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 250$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- b. L'équipe d'entretien devra impérativement intervenir car à un moment donné (jour N) $u_N \geq 1000$.
4. a. Ci-dessous l'algorithme complété :

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 605$
Tant que $U < 1000$ faire
$U \leftarrow 1,06 \times U - 15$
$N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

- b. À l'aide de la calculatrice, $a_{12} \approx 964,33$ et $a_{13} \approx 1007,19$. A la fin de l'exécution, la variable N contient la valeur 13.

Par le calcul :

$$u_n \geq 1000 \iff 355 \times 1,06^n + 250 \geq 1000 \iff 355 \times 1,06^n \geq 750 \iff 1,06^n \geq \frac{750}{355}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,06^n) \geq \ln\left(\frac{150}{71}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(1,06) \geq \ln\left(\frac{150}{71}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{150}{71}\right)}{\ln(1,06)}$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{150}{71}\right)}{\ln(1,06)} \approx 12,84$ donc $n \geq 13$. On retrouve le résultat précédent.

- c. L'intervention devra donc intervenir 13 jours après le 1^{er} janvier 2018, soit donc le 14 janvier 2018.

Exercice 3

5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. L'ordre de ce graphe est 5 car il possède 5 sommets.

2. a. La matrice d'adjacence de ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- b. Pour trouver le nombre de chemin de longueur 3 allant de D à F, il faut lire le coefficient $a_{3,4}$ de la matrice $M^3 = (a_{i,j})$: ici c'est 3. Il existe donc trois parcours.
Ce sont : $D \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow F$; $D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F$ et $D \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow F$.

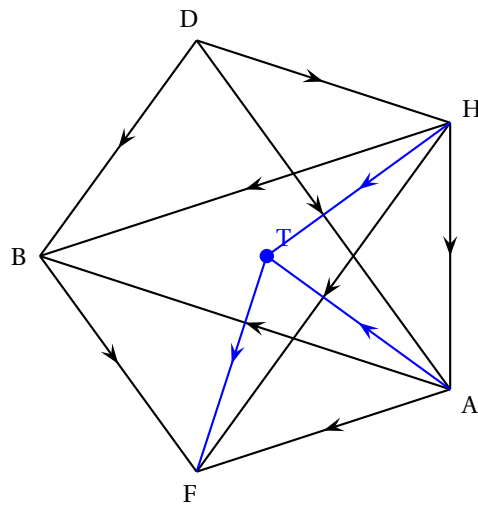
3. En utilisant l'algorithme de Dijkstra :

A	B	D	F	H	Sommet Choisi
28 (D)	40 (D)	0	$+\infty$	19 (D)	H (19)
45 (H)	35 (H)		51 (H)		A (28)
28 (D)	40 (D)				
	68 (D)		51 (H)		B (35)
	35 (H)				
			49 (B)		F (49)
			51 (H)		

Le chemin le plus court sera : $D \xrightarrow{19} H \xrightarrow{16} B \xrightarrow{14} F$ et aura pour longueur 49.

Partie B

Le graphe complété des 3 nouveaux chemins :



Exercice 4

4 points

Commun à tous les candidats

1. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-2; 4]$.
 Pour tout $x \in [0; 5]$, $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x) + 3$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = e^{-2x}$.
 En écrivant $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2e^{-0,2x}$,
 $f'(x) = 2 \times e^{-2x} + (2x + 1) \times -2e^{-x} = e^{-2x} (2 + (2x + 1) \times -2) = e^{-2x} (2 - 4x - 2) = e^{-2x} (-4x)$
2. $\forall x \in [-2; 4], e^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-4x$.
 Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 4]$ est :

x	-2	0	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-3e^4 + 3$	4	$9e^{-8} + 3$

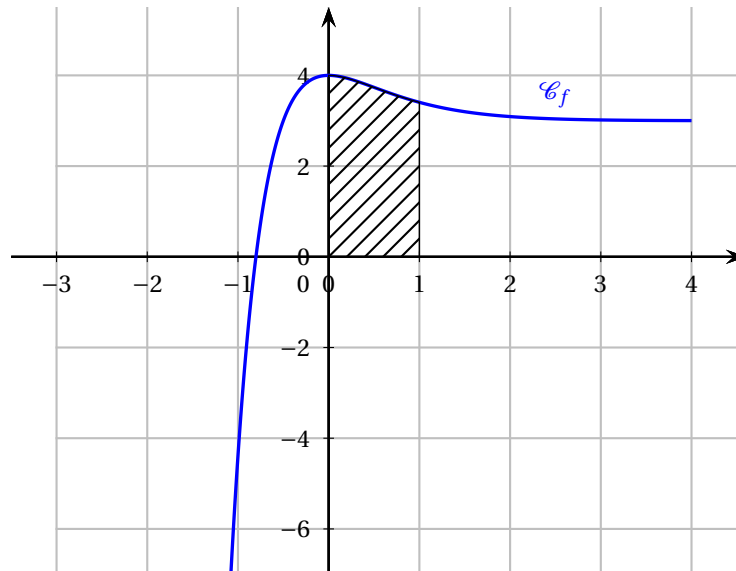
$$f(-2) = (2 \times -2 + 1)e^{-2 \times -2} + 3 = -3e^4 + 3 \approx -160,8 \qquad f(0) = (2 \times 0,6 + 1)e^0 + 3 = 4$$

$$f(4) = (2 \times 4)e^{-2 \times 4} + 3 = 9e^{-8} + 3 \approx 3$$

3. Sur l'intervalle $[-2; 0]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
 De plus $0 \in [-3e^4 + 3; 4]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[-2; 0]$. À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx -0,8$.
 Sur l'intervalle $[0; 4]$, la fonction f est strictement décroissante donc $f(x) \geq f(4)$. Or $f(4) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
 Pour conclure, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique $\alpha \approx -0,8$ sur l'intervalle $[-2; 4]$.
4. a. $\forall x \in [-2; 4], e^{-2x} > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $8x - 4$.
 $8x - 4 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$. Le tableau suivant donne le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[-2; 4]$:

x	-2	$\frac{1}{2}$	4
$f''(x)$	-	0	+

- b. D'après le tableau de signe précédent, f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.
5. a. On admet que la fonction G est dérivable sur l'intervalle $[-2; 4]$.
 $\forall x \in [-2; 4]$, $G(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = -x - 1$ et $v(x) = e^{-2x}$.
 En écrivant $u'(x) = -1$ et $v'(x) = -2e^{-0,2x}$,
 $G'(x) = -1 \times e^{-2x} + (-x - 1) \times -2e^{-x} = e^{-2x}(-1 + (-x - 1) \times -2) = e^{-2x}(-1 + 2x + 2)$
 $G'(x) = e^{-2x}(2x + 1)$.
 Donc la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 4]$.
- b. Une primitive de f sur l'intervalle $[-2; 4]$ est : $F(x) = G(x) + 3x = (-x - 1)e^{-2x} + 3x$.
6. a. Sur le dessin ci-dessous est hachuré \mathcal{A} l'aire du domaine \mathcal{D} compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



- b. Par lecture graphique, dans la limite de sa précision : $3 \leq \mathcal{A} \leq 4$
- c. $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$.
 $F(1) = (-1 - 1)e^{-2} + 3 = -2e^{-2} + 3$ et $F(0) = -e^0 = -1$
 donc $\mathcal{A} = -2e^{-2} + 3 + 1 = 4 - 2e^{-2} \approx 3,73$