∾ Corrigé du baccalauréat ES Métropole 15 juin 2006 ∾

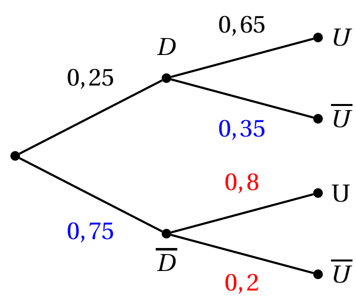
Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

a. Il y a trois points de la courbe Γ d'ordonnée 4 : Fausse.
b. Vraie.
c. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 5)] = +\infty$. On a manifestement $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 5)] = 0$, ce signifie que la droite (Δ) est asymptote à la courbe Γ au voisinage de plus l'infini. Fausse.
d. La tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 0 a un coefficient directeur inférieur à $-1,5$. Fausse.
e. La fonction f est décroissante sur $[-1~;~1]$; sur cet intervalle $f'(x) \leqslant 0$. Fausse.
f. Sur l'intervalle $[-1~;~1]$ la fonction f est positive donc l'intégrale est égale (en unité d'aire) à l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$. On compte au moins 8 carreaux unités. Vraie.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



On donne, de plus, la probabilité de l'évènement U : $p(U) = 0,7625$.

PARTIE A

1. **a.** D'après l'arbre on lit $p_D(U) = 0,65$

   b. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(U) = p(D \cap U) + p\left(\overline{D} \cap U\right) = p(D) \times p_U(D) + p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(U)$, soit :
   $0,7625 = 0,25 \times 0,65 + 0,75 p_{\overline{D}}(U) \iff 0,7625 = 0,25 \times 0,65 + 0,75 p_{\overline{D}}(U) \iff 0,7625 = 0,1625 + 0,75 p_{\overline{D}}(U) \iff 0,75 p_{\overline{D}}(U) = 0,6 \iff p_{\overline{D}}(U) = \dfrac{0,6}{0,75} = 0,8$.

2. **a.** Il faut trouver $p(D \cap U) = 0,25 \times 0,65 = 0,3125$.

   b. Il faut calculer $p\left(\overline{D} \cap U\right) = p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(U) = 0,75 \times 0,8 = 0,6$.

3. On a par définition :

$$p_{\overline{D}}(U) = \frac{p\left(\overline{D} \cap U\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \frac{0,6}{0,75} = 0,8.$$

PARTIE B

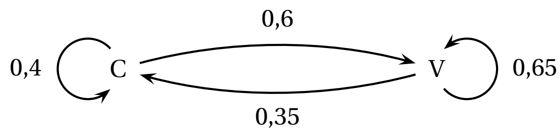
On a une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,25$.
La probabilité de tirer exactement deux DVD reçus en dotation est égale à :
$3 \times 0,25^2 \times (1 - 0,25) = 3 \times 0,0625 \times 0,75 = 0,140625 \approx 0,141$ au millième près.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Première partie

1.



2. On a $(70 \quad 120) \times \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28+42 & 42+78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 120 \end{pmatrix}$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 70 & 120 \end{pmatrix}$, vérifie la relation $P = PM$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain nombre d'années le nombre de personnes pratiquant le co-voiturage va se rapprocher de 70 000.

Deuxième partie

1. Pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = X_{n+1} - 70 = 0,05X_n + 66,5 - 70 = 0,05X_n - 3,5 = 0,05\,(X_n - 70)$.

Donc $U_{n+1} = 0,05U_n$, ce qui signifie que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,05$, de premier terme $U_0 = X_0 - 70 = 60 - 70 = -10$.

2. D'après la question précédente, on sait que :

$U_n = U_0 \times q^n = -10 \times 0,05^n$.

Or $U_n = X_n - 70 \iff X_n = 70 + U_n$ soit finalement :

$U_n = 70 - 10 \times 0,05^n$.

Comme $10 \times 0,05^n > 0$, $U_n < 70$, ce qui représente moins de la moitié (95 mille) de la population.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. Premier modèle

a. La calculatrice donne $y = 2,033x + 37,313$, soit en arrondissant les coefficients au centième :

$y = 2,03x + 37,31$.

b. 2008 correspondant au rang $x = 18$, on obtient $y = 2,03 \times 18 + 37,31 = 73,85$.

2. Deuxième modèle

a. Accroissement relatif de la consommation médicale de l'année 2000 à l'année 2001 :

$\dfrac{57 - 51,81}{51,81} \approx 0,1$.

Accroissement relatif de la consommation médicale de l'année 2001 à l'année 2002 :

$\dfrac{62,7 - 57}{57} = 0,1$.

b. On considère donc à partir de l'année une augmentation annuelle de 10 %.
Donc en 2008, soit avec $n = 8$, une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros est :
$51,81 \times 1,1^8 \approx 111,059$, soit 111,06 milliards au centième près.

PARTIE B : Réduction des dépenses

On doit avoir une baisse de $\dfrac{83,44 - 69,79}{83,44} \times 100 \approx 16,359$ soit arrondie à l'unité près une baisse de 16 %.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-3} - \frac{1}{x+4}$$

PARTIE A

1. On a $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x-3} - \left(-\dfrac{1}{(x+4)^2}\right) = \mathrm{e}^{x-3} + \dfrac{1}{(x+4)^2}$
2. On sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{x-3} >$ et $\dfrac{1}{(x+4)^2} > 0$ car quotient de deux nombres positifs.
   Donc on a $f'(x) > 0$ sur $[0~;~+\infty[$: la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
3. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+4} = 0$ et quel que soit x, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-3} = +\infty$, d'où par somme de limites :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. **a.** La fonction f est strictement croissante de $f(0) = \mathrm{e}^{-4} - \dfrac{1}{4} \approx -0,232$ à plus l'infini.

   b. La fonction f est dérivable donc continue sur $[0~;~+\infty[$ croissant d'un nombre négatif à plus l'infini : il existe donc un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.
   On a donc d'après les variations de f :
   - $f(x) < 0$ sur $[0~;~\alpha[$;
   - $f(x) > 0$ sur $]a~;~+\infty[$;
   - $f(\alpha) = 0$.
5. **a.**

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$	−0,001 60	−0,000 49	0,000 63

   b. Le résultat précédent montre qu'au centième près $\alpha \approx 1,33$.

PARTIE B

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x-3} - \ln(x+4)$$

   a. On a sur $[0~;~+\infty[$, $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x-3} - \dfrac{1}{x+4} = \mathrm{e}^{x-3} - \dfrac{1}{x+4} = f(x)$. g est donc une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b. D'après la question 4. a. de la partie A, on a :

- $g'(x) < 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$: la fonction g est décroissante sur $[0\,;\,\alpha[$;
- $g'(x) > 0$ sur $]a\,;\,+\infty[$: la fonction g est croissante sur $]a\,;\,+\infty[$;
- $g'(\alpha) = 0$: $g(\alpha)$ est le minimum de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

On a $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_0^3 = \left[\mathrm{e}^{x-3} - \ln(x+4)\right]_0^3 = \mathrm{e}^{3-3} - \ln(3+4) - \left(\mathrm{e}^{0-3} - \ln(0+4)\right) = 1 - \ln 7 - \mathrm{e}^{-3} + \ln 4 = 1 - \mathrm{e}^{-3} + \ln\dfrac{4}{7}$.

On a au centième près : $\mathrm{I} \approx 0,39$.