∽ Corrigé du baccalauréat ES Métropole 14 juin 2007 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

QCM

1. Réponse B (cours)
2. Réponse C
3. **a.** Une solution inférieure à -1. Réponse C.

   b. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :
   $y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y = xf'(0) + f(0)$.
   On lit sur le tableau : $\sqrt{2} \approx 1,414 < f(0) < \text{e} \approx 2,718$ et $f'(0) < 0$.
   Seule l'équation de la réponse A a ses coefficients qui vérifient les deux exigences.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. La calculatrice donne après arrondi des coefficients au centième : $y = 2\,111,37x + 24\,981,57$.
2. 2007 correspond au rang $x = 7$, d'où $y = 2\,111,37 \times 7 + 24\,981,57 = 39\,761,16$ soit au million près 39 761 millions d'euros.

Partie B

1. Pour $n = 7$, on obtient $f(n) = \text{e}^{10,13+0,07\times 7} = \text{e}^{10,62} \approx 40\,945,6$ soit environ 40 946 millions d'euros au million près.
2. **a.** Il faut résoudre l'inéquation :
   $f(n) > 45\,000 \iff \text{e}^{10,13+0,07n} > 45\,000 \iff 10,13 + 0,07n > \ln 45\,000 \iff$
   $0,07n > \ln 45\,000 - 10,13 \iff n > \dfrac{\ln 45\,000 - 10,13}{0,07}$.
   Or $\dfrac{\ln 45\,000 - 10,13}{0,07} \approx 8,3$: il faut donc attendre 9 ans.

   b. $n = 9$ correspond à l'année 2009.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1 : Le point A représenté par une croix est un point de la surface $(\mathscr{S})$.

1. On lit $x = 6$ et $z = 4$.
   On a donc $z = \dfrac{3xy}{x+y} \iff 4 = \dfrac{18y}{6+y} \iff 4(6+y) = 18y \iff 24 + 4y = 18y \iff 24 = 14y \iff$
   $y = \dfrac{24}{14} = \dfrac{12}{7} \approx 1,7$ au dixième près.
2. Pour une durée de travail de 6 heures et 1,7 h d'utilisation de machines, on produit 4 tonnes.

Partie 2 :

1. **a.** $g'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec
$u(x) = 4x^2 - 36x$, d'où $u'(x) = 8x - 36$ et
$v(x) = x - 12$, d'où $v'(x) = 1$.
$g'(x) = \dfrac{(8x-36)(x-12) - \left(4x^2 - 36x\right)}{(x-12)^2} = \dfrac{8x^2 - 96x - 36x + 432 - 4x^2 + 36x}{(x-12)^2} = \dfrac{4x^2 - 96x + 432}{(x-12)^2}$.
Or d'après l'indication du résultat :
$4(x-6)(x-18) = 4\left(x^2 - 18x - 6x + 108\right) = 4\left(x^2 - 24x + 108\right) = 4x^2 - 96x + 432$.
Donc on a bien $g'(x) = \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$.

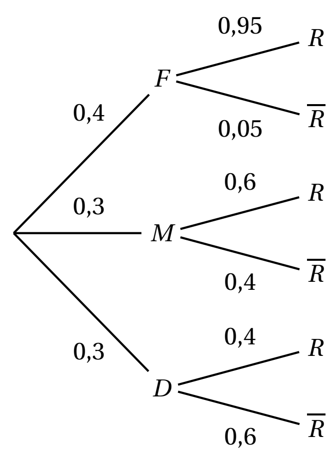
   b. Comme $x-12)^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur donc de $(x-6)(x-18)$, trinôme qui est positif (car $a = 1 > 0$) sauf entre les racines 6 et 18, donc entre 6 et 10.
On a donc :
   - $g'(x) > 0$ sur $[0\,;\,6]$: g est croissante sur cet intervalle ;
   - $g'(x) < 0$ sur $[6\,;\,10]$: g est décroissante sur cet intervalle ;
   - $g'(x) = 0$ pour $x = 6$: la fonction a donc un maximum en $x = 6$.

2. **a.** La production est maximale pour $x = 6$, d'où $y = 36 - 4x = 36 - 24 = 12$.
La production est maximale pour 6 heures de main d'œuvre et 12 heures de machines.

   b. en tonnes. On a vu que le maximum de la fonction g est $g(6) = \frac{4\times6^2 - 36\times6}{6-12} = \dfrac{144 - 216}{-6} = \dfrac{-72}{-6} = 12$ (tonnes).

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1.



2. **a.** On a $p(D \cap R) = p(D) \times p_D(R) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.

   b. $p\left(F \cap \overline{R}\right) = p(F) \times p_F(\left(\overline{R}\right) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$.

   c. D'après la loi des probabilités totales :
$p(R) = p(F \cap R) + p(M \cap R) + p(D \cap R)$
$p(F \cap R) = 0,4 \times 0,95 = 0,38$;
$p(M \cap R) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$, donc
$p(R) = 0,38 + 0,18 + 0,12 = 0,68$.

3. D'après la question précédente $p\left(\overline{R}\right) = 1 - p(R) = 1 - 0,68 = 0,32$.

D'autre part $p\left(\overline{R} \cap M\right) = p\left(M \cap \overline{R}\right) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.

Donc $p_{\overline{R}}(M) = \dfrac{p\left(\overline{R} \cap M\right)}{p\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0,12}{0,32} = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8} = 0,375$.

4. Calculons la probabilité que Pierre ait résolu une grille facile :

$p_R(F) = \dfrac{p(R \cap F)}{p(R)} = \dfrac{0,38}{0,68} = \dfrac{38}{68} = \dfrac{19}{34}$ soit un peu plus d'une chance sur deux. Sa sœur n'a donc pas raison.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie I : étude des coûts hebdomadaires de production

1. Comme $x + 1 \geqslant 1 > 0$, la fonction C_m est défivable sur $[0 ; 10]$ et sur cet intervalle :

$C'_m(x) = 1 - \dfrac{16}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 - 16}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 - 4^2}{(x1)^2} = \dfrac{(x+1+4)'x+1-4)}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+5)(x-3)}{(x+1)^2}$.

Comme le dénominateur est positif, le signe de $C'_m(x)$ est celui du numérateur qui un trinôme du second degré.

On sait que celui-ci est positif (car $a = 1 > 0$), sauf entre les racines -5 et 3. Donc :

- $C'_m(x) < 0$ si $0 \leqslant x \leqslant 3$: la fonction C_m est décroissante sur $[0 ; 3]$;
- $C'_m(x) > 0$ si $3 \leqslant x \leqslant 10$: la fonction C_m est croissante sur $[3 ; 10]$;
- $C'_m(x) = 0$ si $x = 3$. Il y a un minimum de la fonction pour $x = 3$. Ce minimum est égal à $C_m(3) = 3 + \dfrac{16}{3+1} = 3 + 4 = 7$.

2. Une primitive de la fonction $x \longmapsto C_m(x)$ est la fonction $x \longmapsto C(x) = \dfrac{x^2}{2} + 16\ln(x+1) + K$, avec $K \in \mathbb{R}$.

La condition $C(0) = 0$ implique $\dfrac{0^2}{2} + 16\ln(0+1) + K = 0 \iff K = 0$.

Conclusion : $C(x) = \dfrac{x^2}{2} + 16\ln(x+1)$.

Partie II : étude du bénéfice hebdomadaire.

1. a. La fonction B admet donc un maximum pour $x = 7$

b. Ce maximum est égal à $B(7) = 9 \times 7 - 0,5 \times 7^2 - 16\ln(7+1) = 63 - 24,5 - 16\ln 8 =$ $38,5 - 16\ln 8 \approx 5,228$ soit 5,23 centaines d'euros à l'euro près.

2. a. On voit que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse x_0 est telle que $2,5 < x_0 < 3$.

b. La calculatrice donne :

$f(2,8) \approx -0,08$ et $f(2,9) \approx 0,12$, donc $2,8 < x_0 < 2,9$;

$f(2,84) \approx -0,0004$ et $f(2,85) \approx 0,04$, donc $2,84 < x_0 < 2,85$.