Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Métropole septembre 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Augmenter une quantité de 8 %, puis la diminuer de 8 % c'est : multiplier par 1,08 puis par 0,92, soit par $1,08 \times 0,92 = 0,9936$ ce qui correspond à une baisse de 0,64 %.
2. Il y a 61 paires vendues : la 30^{e} et la 31^{e} paire sont des 42 : c'est la médiane.
3. Pour $a > 0$, $\ln\left(a^2+3a\right) = \ln a(a+3) = \ln a + \ln(a+3)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. L'accroissement relatif de la population du 1er janvier 2000 au 1er janvier 2005 est égal à : $\dfrac{11,5-10,5}{10,5} = \dfrac{1}{10,5} \approx 0,095$ soit 0,10 au centième près.
2. Cinq augmentations de 10 % reviennent à multiplier la population initiale par $1,10^5$.
   On aurait eu en 2005 : $10,5 \times 1,1^5 \approx 16,91$ soit au dixième 16,9 (résultat du tableau).

Partie B

$$f(x) = 10,5 \times (1,1)^x.$$

1. **a.** On a $f(6,5) = 10,5 \times 1,1^{6,5} \approx 19,509$ soit 19,5 au dixième près.
   b. Le 1er janvier 2007 correspond à $x = 7$, d'où $f(7) = 10,5 \times 1,1^7 \approx 20,46$, soit 20,5 au dixième près.
2. Voir l'annexe : on lit à peu près 14 000.
3. **a.** Voir l'annexe : on lit 7,25 ce qui correspond à 7 ans et un trimestre, soit au 1er avril 2007.
   b. On résout l'équation :
   $$10,5 \times 1,1^t = 21 \iff 1,1^t = 2 \iff t \ln 1,1 = \ln 2 \iff t = \frac{\ln 2}{\ln 1,1} \approx 7,27254.$$
   On a donc au dixième près $t \approx 7,3$ soit 7 ans et 3,6 mois.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Étude graphique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Voir la figure à la fin.
2. Il semble que la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit inférieure à 5.

PARTIE B : Étude numérique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. **a.** $u_0 = a_0 - 4,8 = 3 - 4,8 = -1,8$.

b. On a pour tout naturel n, $u_{n+1} = a_{n+1} - 4,8 = 0,75a_n + 1,2 - 4,8 = 0,75a_n - 3,6 = 0,75\left(a_n - \dfrac{3,6}{0,75}\right) = 0,75\,(a_n - 4,8) = 0,75u_n$.

$u_{n+1} = 0,75u_n$ montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,75 de premier terme $u_0 = -1,8$.

c. D'après le résultat précédent, on sait que quel que soit le naturel n,
$u_n = -1,8 \times 0,75^n$.
Or $u_n = a_n - 4,8 \iff a_n = u_n + 4,8 \iff a_n = 4,8 - 1,8 \times 0,75^n$.

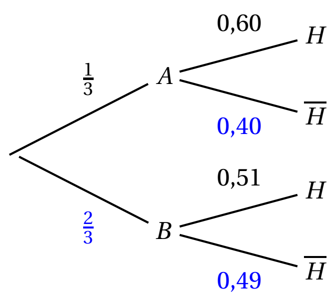
$$a_n = 4,8 - 1,8 \times 0,75^n.$$

d. Comme $0 < 0,75 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4,8$.

2. a_n est majorée par 4,8, donc le nombre d'adhérents ne peut atteindre 480 et *a fortiori* 500 adhérents.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1.



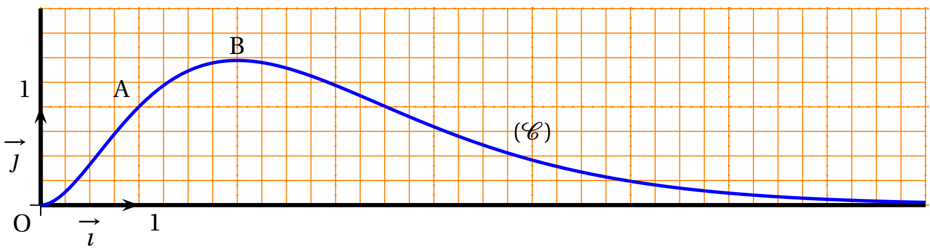
2. La probabilité est égale à :
$p(A \cap H) = p(A) \times p_A(H) = \dfrac{1}{3} \times 0,6 = \dfrac{0,6}{3} = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

3. D'après la loi des probabilités totales :
$p(H) = p(A \cap H) + p(B \cap H)$.
Or $p(B \cap H) = p(B) \times p_B(H) = \dfrac{2}{3} \times 0,51 = \dfrac{1,02}{3} = 0,34$.
Donc $p(H) = p(A \cap H) + p(B \cap H) = 0,20 + 0,34 = 0,54$.

4. On a par définition $p_H(A) = \dfrac{p(H \cap A)}{p(H)} = \dfrac{p(A \cap H)}{p(H)} = \dfrac{0,2}{0,54} \approx 0,370$ soit 0,37 au centième près.

5. On est dans les conditions d'une épreuve de Bernoulli avec les paramètres $n = 3$ et $p = 0,54$.
Il y a trois tirages favorables : $HH\overline{H}$, $H\overline{H}H$, $\overline{H}HH$ chacun de probabilité : $0,54^2 \times (1 - 0,54) = 0,54^2 \times 0,46$.
La probabilité de l'évènement « exactement deux des personnes choisies accèdent à Internet par le haut débit »est donc égale à :
$3 \times 0,54^2 \times 0,46 = 0,402\,488$ soit 0,40 au centième près.

EXERCICE 4 **8 points**
Commun à tous les candidats



Partie A

1. **a.** • L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   • La droite (OA) est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A, donc son coefficient directeur est égal à $\dfrac{1-0}{1-0} = 1$; $f'(1) = 1$.

   • Au point B, la courbe $(\mathcal{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc $f'(2) = 0$.

   b. • La fonction est croissante sur $]0\,;\,2]$ de 0 à $\dfrac{4}{\mathrm{e}} > 1$: la fonction étant continue sur cet intervalle il existe donc $x \in]0\,;\,2]$ tel que $f(x) = 1$; or A a pour coordonnées $(1\,;\,1)$, donc $f(1) = 1$: 1 est une solution de l'équation.

   • La fonction est décroissante sur $]2\,;\,+\infty[$ de $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$ à 0 : la fonction étant continue il existe donc $\alpha \in]2\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1$.
   L'équation admet donc deux solutions.

2. La fonction logarithme népérien étant croissante sur son intervalle de définition les variations de g sont les mêmes que celles de f soit croissante sur $]0\,;\,2]$ et décroissante sur $]2\,;\,+\infty[$.

Partie B

$$f(x) = x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}.$$

1. **a.** Sur $[0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = \ln[f(x)] = \ln\left(x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}\right) = \ln x^2 + \ln\left(\mathrm{e}^{-x+1}\right) = 2\ln x + (-x+1) = -x+1+2\ln x$

   b. On sait que si la fonction u est dérivable $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, donc ici :
   $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2x\mathrm{e}^{-x+1} - x^2\mathrm{e}^{-x+1}}{x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}} = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x+1}(2-x)}{x^2 \times \mathrm{e}^{-x+1}} = \dfrac{2-x}{x}$.
   Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc celui du numérateur $2-x$. On retrouve que :
   • $2-x > 0 \iff 2 > x \iff 0 < x < 2$: sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, $g'(x) > 0$, la fonction g est strictement croissante.
   • $2-x < 0 \iff 2 < x \iff x > 2$: sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$, $g'(x) < 0$, la fonction g est strictement décroissante.

2. $$h(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right) \times \mathrm{e}^{-x+1}.$$

   a. La fonction h est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $h'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{-x+1} - 1 \times \left(x^2+2x+2\right) \times \mathrm{e}^{-x+1} = \mathrm{e}^{-x+1}\left(2x+2-x^2-2x-2\right) = -x^2\mathrm{e}^{-x+1}$.

   b. On a $h'(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x+1} \iff h'(x) = -\left[x^2\mathrm{e}^{-x+1}\right] = -f(x) \iff f(x) = -h'(x)$.
   Donc une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$ est la fonction
   $-h(x) = -\left(x^2+2x+2\right) \times \mathrm{e}^{-x+1}$.

c. La fonction f étant positive en particulier sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, l'aire; en unité d'aire, de la surface comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 2$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [-h(x)]_0^2 = \left[-\left(x^2+2x+2\right)\times \mathrm{e}^{-x+1}\right]_0^2 = -\left(2^2+2\times 2+2\right)\times \mathrm{e}^{-2+1}+\left(0^2+2\times 0+2\right)\times \mathrm{e}^{-0+1} = -10\mathrm{e}^{-1}+2\mathrm{e} = 2\mathrm{e}-10\mathrm{e}^{-1} \approx 1,757$ soit 1,8 au dixième près.

ANNEXE 1

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

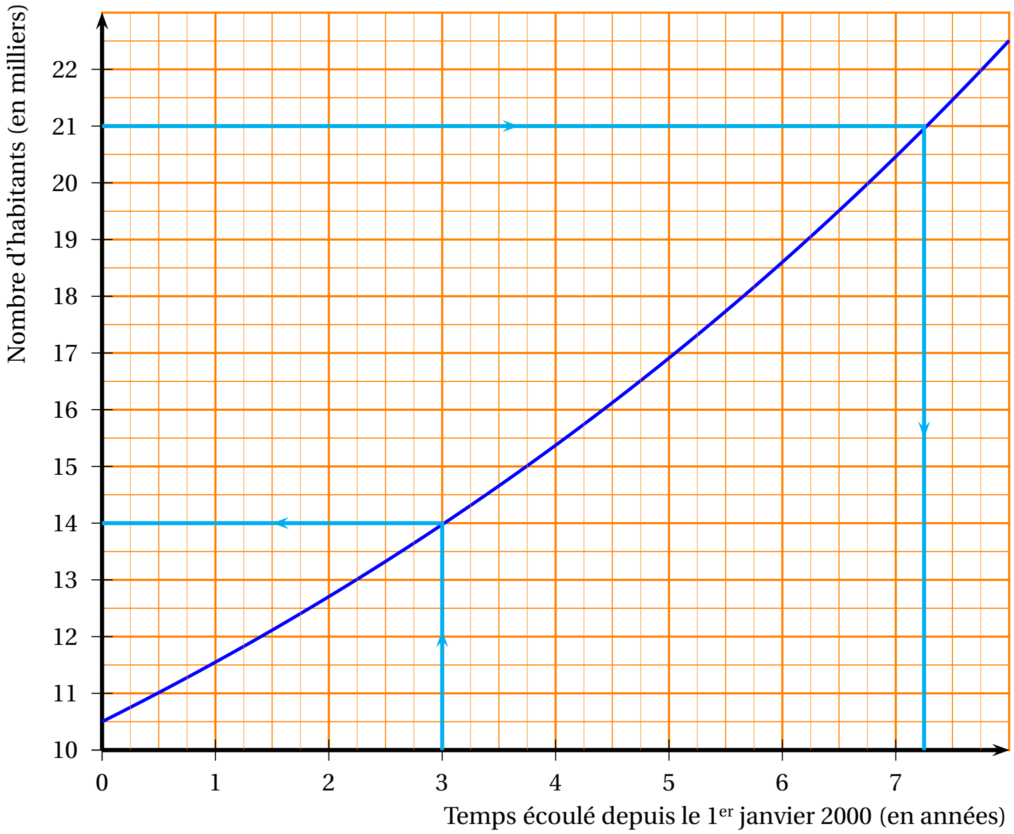
Ne cocher qu'une seule réponse par question

1. Augmenter une quantité de 8 %, puis la diminuer de 8 % c'est :	☐ revenir à la quantité initiale ☐ augmenter la quantité initiale de 0,64 % ☐ diminuer la quantité initiale de 0,64 %
2. La médiane de cette série est égale à :	☐ 13 ☐ 42 ☐ 43
3. Pour tout nombre réel a strictement positif, $\ln\left(a^2+3a\right) =$	☐ $\ln\left(a^2\right)+3\ln(a)$ ☐ $\ln(a)+\ln(a+3)$ ☐ $2\ln(a)+\ln(3a)$

ANNEXE 2

EXERCICE 2

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



ANNEXE 2

EXERCICE 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie