Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2007

Exercice 1 **4 points**

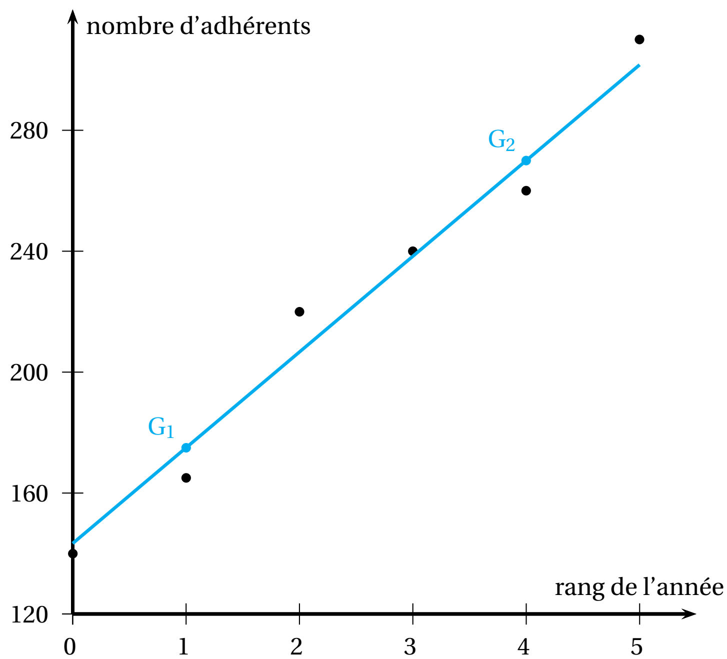
Commun à tous les candidats

1. V : la droite d'équation $y = -1$ coupe la courbe Γ en deux points.
2. F : Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à $\dfrac{1,5-(-2)}{1-0,5} = \dfrac{3,5}{0,5} = 7$.
3. V : sur $[1\,;\,2]$, f est croissante et positive donc f et f' sont toutes les deux positives.
4. V : Une primitive F de f vérifie $F'(x) = f(x) \geqslant 0$ sur $\left[1\,;\,\dfrac{7}{2}\right]$, donc F est croissante sur cet intervalle.
5. F : Sur $]0\,;\,1[$, $f(x) < 0$, donc $\ln[f(x)]$ n'existe pas.
6. F :Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$ la fonction exponentielle est croissante et la fonction f est décroissante, donc par composition la fonction $\text{e}^{f(x)}$ est décroissante.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. Un premier ajustement du nuage des points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$

   a. On a $G_1(1\,;\,175)$ et $G_2(4\,;\,270)$.

   b. Les coordonnées de G_1 et de G_2 vérifient l'équation $y = Ax + B$ soit :

   $\left\{\begin{array}{rcl} 175 & = & A+B \\ 270 & = & 4A+B \end{array}\right. \Rightarrow 95 = 3A \iff A = \dfrac{95}{3}$, puis

   $B = 175 - A = 175 - \dfrac{95}{3} = \dfrac{525-95}{3} = \dfrac{430}{3}$.

   L'équation réduite de la droite (G_1G_2) est donc $y = \dfrac{95}{3}x + \dfrac{430}{3}$.

c. 2007 correspond au rang $x = 7$, d'où $y = \dfrac{95}{3} \times 7 + \dfrac{430}{3} = \dfrac{665}{3} + \dfrac{430}{3} = \dfrac{1\,095}{3} = 365$ adhérents.

3. Dans cette question, on utilise la droite des moindres carrés,

a. La calculatrice donne $y = 33x + 140$.

b. Pour $x = 7$, on obtient $y = 33 \times 7 + 140 = 231 + 140 = 371$ adhérents.

4. a. Augmenter chaque année de $\dfrac{t}{100}$, c'est multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$; t vérifie donc :

$140 \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5 = 310 \iff \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5 = \dfrac{310}{140} \iff 1 + \dfrac{t}{100} = \left(\frac{310}{140}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Or $\left(\frac{310}{140}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}172\,32$.

Donc au centième près le taux moyen d'augmentation sur les cinq années est environ de 17,23 %.

b. En continuant avec ce taux d'augmentation le nombre d'adhérents en 2007 sera environ de :

$310 \times 11{,}172\,3^2 \approx 426$.

Avec une augmentation moyenne annuelle de 17,23 % on peut espérer avoir en 2007, 426 adhérents.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Oui par exemple : A – B – G – D – F – E – C – A.

2. Le nombre de chemins longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F est le nombre situé sur la première ligne et la sixième colonne soit 4 : A– B– D– F ; A–B–E–F ; A–C–D–F et A–C–E–F.

On utilise l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A (0)
	A 5	A 7	∞	∞	∞	∞	B
		A 7	B 13	B 20	∞	B 11	C
			B 13	B 20	∞	B 11	G
			B 13	B 20	∞		D
				B 20	D 33		E
					E 25		F

On remonte les sommets F–E–B–A, donc le trajet le plus court est A–B–E–F dont la longueur est 25 centaines de km soit 2 500 km.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. a. Il faut trouver :

$p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}55 \times 0{,}98 = 0{,}539$.

b. Parmi ceux qui possèdent un téléphone portable, 60 % possèdent un ordinateur, donc on a $p_T(M) = 0{,}6$.

Mais :

$p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)}$.

On a donc $p(T) = \dfrac{p(M \cap T)}{p_T(M)} = \dfrac{0{,}54}{0{,}6} = 0{,}9$.

2. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
$p(T) = p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right)$ ou encore $p\left(\overline{M} \cap T\right) = p(T) - p(M \cap T) = 0,9 - 0,54 = 0,36$.

b. On a $p_{\overline{M}}(T) = \dfrac{p\left(T \cap \overline{M}\right)}{p\left(\overline{M}\right)} = \dfrac{p\left(T \cap \overline{M}\right)}{1 - p(M)} = \dfrac{0,36}{1 - 0,55} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

Partie B :
La loi associée au nombre d'ordinateurs possédés par les élèves est une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = p(M) = 0,55$.
La probabilité de l'évènement E est égale à $3 \times 0,55^2(1 - 0,55) = 0,408\,375 \approx 0,41$.

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 6$.

b. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^x = +\infty$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. • $h\left[\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)\right] = \mathrm{e}^{2\times\ln\left(\frac{7}{2}\right)} - 7\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{7}{2}\right)} + 6 = \mathrm{e}^{\frac{49}{4}} - 7\mathrm{e}^{\ln\frac{7}{2}} + 6 = \frac{49}{4} - 7 \times \frac{7}{2} + 6 = \frac{49-98+24}{4} = -\frac{25}{4}$.
• $h(0) = 1 - 7 + 6 = 0$;
• $h(\ln 6) = \mathrm{e}^{2\ln 6} - 7\mathrm{e}^{\ln 6} + 6 = \mathrm{e}^{\ln 36} - 7\mathrm{e}^{\ln 6} + 6 = 36 - 42 + 6 = 0$.

3. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$h'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x - 7\right)$.
Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, $h'(x)$ a le signe de $2\mathrm{e}^x - 7$.
• $h'(x) > 0 \iff 2\mathrm{e}^x - 7 > 0 \iff 2\mathrm{e}^x > 7 \iff \mathrm{e}^x > \frac{7}{2} \iff x > \ln\frac{7}{2}$: la fonction h est croissante sur $\left]\ln\frac{7}{2}\ ;\ +\infty\right[$ de $-\dfrac{25}{4}$ à plus l'infini. De même :
• $h'(x) < 0 \iff 2\mathrm{e}^x - 7 < 0 \iff 2\mathrm{e}^x < 7 \iff \mathrm{e}^x < \frac{7}{2} \iff x < \ln\frac{7}{2}$: la fonction h est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \ln\frac{7}{2}\right[$ de 6 à $-\dfrac{25}{4}$.
• $h'(x) = 0 \iff 2\mathrm{e}^x - 7 = 0 \iff x = \ln\frac{7}{2}$. $h\left[\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)\right] = -\frac{25}{4}$ est le minimum de h sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction s'annulant en 0 et en $\ln 6$, on en déduit que $h(x) \geqslant 0$, sauf sur l'intervalle $]0\ ;\ \ln 6[$.

Partie B

1. $f(\ln 6) = 6 - 6\mathrm{e}^{-\ln 6} = 6 - 6 \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 6}} = 6 - 6\dfrac{1}{6} = 6 - 1 = 5$;
$g(\ln 6) = \mathrm{e}^{\ln 6} - 1 = 6 - 1 = 5$.
Ceci montre que le point de coordonnées $(\ln 6\ ;\ 5)$ est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. **a.** $f(x) - g(x) = 6 - 6\mathrm{e}^{-x} - \left[\mathrm{e}^x - 1\right] = 7 - 6\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\left(7 - 6\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x\right) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(7 - 6\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{7\mathrm{e}^x - 6 - \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{-h(x)}{\mathrm{e}^x}$

b. $f(x) - g(x)$ a donc le signe de $h(x)$, donc :
$f(x) - g(x) > 0 \iff f(x) > g(x)$ qui signifie que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$, sauf sur l'intervalle $]0\ ;\ \ln 6[$ où c'est le contraire.

3. **a.** Voir le graphique.

b. On a vu que sur $[0~;~\ln 6]$, $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ en unités d'aire est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^{\ln 6} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 6} \left[7 - 6\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}\right]\,\mathrm{d}x = \left[7x + 6\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}\right]_0^{\ln 6} = 7\ln 6 + 6\mathrm{e}^{-\ln 6} - \mathrm{e}^{\ln 6} - \left[7 \times 0 + 6\mathrm{e}^{-0} - \mathrm{e}^{0}\right] = 7\ln 6 + 1 - 6 - 6 + 1 = 2 + 7\ln 6 - 10$ unités d'aire.

Or 1 unité d'aire vaut $2 \times 1 = 2$ cm^2.

Donc l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à $14\ln 6 - 20$ cm^2, soit environ 5,084 cm^2, soit finalement environ 5,08 cm^2 au centième près.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 4