Corrigé du baccalauréat ES Polynésie 16 juin 2017

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

1. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{3}{10} \iff \ln\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right) = \ln\left(\dfrac{3}{10}\right)$

$\iff x \times \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{10}\right) \iff x \times [-\ln(2)] = \ln(3) - \ln(10)$

$\iff x = \dfrac{\ln(3) - \ln(10)}{-\ln(2)} = \dfrac{\ln(10) - \ln(3)}{\ln(2)}$ **Réponse b.**

2. Pour tout $x \in [-2\,;\,2]$, la fonction f définie par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

En effet $f(x)$ est de la forme $u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$. Cette dernière admet pour primitive $\mathrm{e}^{u(x)}$.

$F(2) = \mathrm{e}^4$ et $F(-2) = \mathrm{e}^4$. Donc $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(-2) = 0$ **Réponse c.**

3. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty]$,

$f'(x) = 2 \times \ln(x) + (2x+3) \times \dfrac{1}{x} = 2\ln(x) + 2 + \dfrac{3}{x}$ **Réponse c.**

4. Si on augmente de 5 % une quantité on la multiplie par 1,05, et si on l'augmente de 7 % on multiplie par 1,07. Les deux augmentations successives donneront un coefficient multiplicateur égal à $1,05 \times 1,07 = 1,1235$ soit une augmentation de 12,35 %. **Réponse d.**

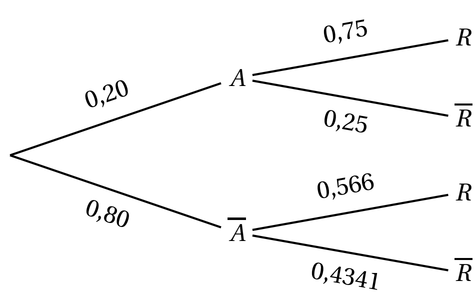
EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. D'après l'énoncé, $P(A) = 0,20$, $P_A(R) = 0,75$ et $P_{\overline{A}}(R) = 0,566$

b. On complète l'arbre de probabilités proposé dans le texte :



2. a. Formule de Bayes $P(A \cap R) = P_A(R) \times P(A) = 0,75 \times 0,20 = 0,15$.

b. La probabilités qu'un candidat réussie le permis et ait suivi la formation AAC est de 15 %.

3. Formule des probabilités totales :

$P(R) = P(R \cap A) + P\left(R \cap \overline{A}\right) = P_A(R) \times P(A) + P_{\overline{A}}(R) \times P\left(\overline{A}\right)$

$P(R) = 0,15 + 0,80 \times 0,566 = 0,602\,8$.

4. Formule de Bayes : $P(A \cap R) = P_R(A) \times P(R)$ donc
$P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,15}{0,6028} \approx 0,248\,8$.

Partie B

1. La fréquence théorique de tickets gagnants est $p = 0,62$ et l'échantillon est de taille $n = 400$.
On a $n \geqslant 30$, $np = 248 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 152 \geqslant 5$ on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Or $p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,572\,4$ et $p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,667$.
Finalement $I_{400} = [0,572\,4\ ;\ 0,667\,6]$.

2. Calculons la fréquence de réussite : $f = \dfrac{220}{400} = \dfrac{11}{20} = 0,55$.
$f \notin I_{400}$ donc on peut raisonnablement émettre des doutes quant aux affirmations de ce responsable.

Partie C

1. On sait que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 1\,500$ et $\sigma = 410$.
Avec la calculatrice, $P(1\,090 \leqslant X \leqslant 1\,910) \approx 0,68$.
On peut également dire que $1\,090 = \mu - \sigma$ et $1\,910 = \mu + \sigma$, et on sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$.

2. Avec la calculatrice, $P(X \leqslant 1\,155) = 0,5 - P(1\,155 \leqslant X \leqslant 1\,500) \approx 0,20$.

3. a. $P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a) = 0,2$ donc $P(X \leqslant a) = 0,8$.
À l'aide de la touche *InvNormCD* (inversion de la loi normale), on trouve $a \approx 1\,845,06$ soit $a \approx 1\,845$.

b. Cela veut donc dire que moins de 20% des candidats auront payé plus de 1 845 € pour obtenir leur permis.

EXERCICE 3 **5 POINTS**
Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

1. Soit u_n la surface en millions d'hectares de forêt pour l'année n, et u_{n+1} celle en millions d'hectares de l'année $n+1$.
D'une année à l'autre la surface diminue de 0,4%, donc il en restera 99,6%, soit avec les notations $0,996 \times u_n$. On ajoute alors 7,2 millions d'hectares, soit donc au total $0,996 \times u_n + 7,2$.
Donc $u_{n+1} = 0,996 \times u_n + 7,2$.
Donc pour tout entier naturel n, la suite (u_n) permet d'obtenir une estimation de la surface boisée en millions d'hectares pour l'année $2015 + n$.

2. Algorithme complété :

Variables :	N est un nombre entier naturel
	U est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 2015
	Affecter à U la valeur 4 000
Traitement :	Tant que $U \geqslant 3500$ faire
	Affecter à U la valeur $0,996 \times U + 7,2$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

3. **a.** Pour tout entier naturel n,
$v_{n+1} = u_{n+1} - 1800 = 0,996u_n + 7,2 - 1800 = 0,996u_n - 1792,8$
$= 0,996 \times \left(u_n - \dfrac{1792,8}{0,996}\right) = 0,996 \times (u_n - 1800) = 0,996 \times v_n$.
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,996$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1800 = 220$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 2200 \times 0,996^n$.
De plus $v_n = u_n - 1800$ donc $u_n = v_n + 1800$.
Donc pour tout entier naturel n, $u_n = 2200 \times 0,996^n + 1800$.

c. La limite de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini est égale à 0 car $q \in]-1\,;\,1[$.
Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini sera égale à 1 800.
Cela signifie qu'au bout d'un très grand nombre d'années, la surface boisée tendra vers 1 800 millions d'hectares.

4. Chaque année depuis 2016, le nombre d'arbres plantés augmente de 10 %, donc est multiplié par 1,1. Donc pour l'année $2016 + n$, l'ONU aura replanté $7,3 \times 1,1^n$ milliards d'arbres.
La somme des 10 premiers termes (de 2016 à 2025) est donc :
$S = 7,3 \times \dfrac{1 - 1,1^{10}}{1 - 1,1} \approx 116,34 < 140$.
L'ONU n'arrivera donc pas à atteindre son objectif.

Exercice 3 — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

À l'aide de l'algorithme de Dijkstra

Départ-Sommet	A	B	C	D	E	F	O
O	2, O	5, O	4, O	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
A(2)		~~5, O~~ 4, A	4,O	9, A	∞	$+\infty$	
B(4)			4, O	9, A	7, B	$+\infty$	
C(4)				9, A	7, B	$+\infty$	
E(7)				~~9, A~~ 8, E		15, E	
D(8)						14, D	

Le tracé le plus court entre O et F est donc : O $\longrightarrow$ A $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ E $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ F.
Il devra donc combattre 14 créatures.

Partie B

1. Pout tout $x \in [1~;~10]$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   $f(1) = 8 \iff a+b+c = 8$.
   $f(2) = 25 \iff 4a+2b+c = 25$.
   $f(3) = 80 \iff 9a+3b+c = 80$.
   On obtient le système suivant : $\left\{\begin{array}{l c l} a+b+c & = & 8\\ 4a+2b+c & = & 25\\ 9a+3b+c & = & 80\end{array}\right.$
2. On pose $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}8\\25\\80\end{pmatrix}$.
   $A \times X = B \iff \begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\25\\80\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a+b+c\\4a+2b+c\\9a+3b+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\25\\80\end{pmatrix}$.
   On obtient alors le système précédent.
3. On pose $M = \begin{pmatrix}0,5&-1&0,5\\-2,5&4&-1,5\\3&-3&1\end{pmatrix}$.
   a. Avec la calculatrice,
   $M \times A = \begin{pmatrix}0,5&-1&0,5\\-2,5&4&-1,5\\3&-3&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = Id_3$ matrice identité de dimension 3.
   b. La matrice M représente donc l'inverse de la matrice A.
4. $A \times X = B \implies M \times A \times X = M \times B \iff X = M \times B$. Donc
   $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5&-1&0,5\\-2,5&4&-1,5\\3&-3&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}8\\25\\80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\-40\\29\end{pmatrix}$
   Donc pour tout $x \in [1~;~10]$, $f(x) = 19x^2 - 40x + 19$.
5. La courbe représentative de la fonction f admet un minimum au point d'abscisse $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{20}{19}$. Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{20}{19}~;~10\right]$, et pour tout $x \in \left[\dfrac{20}{19}~;~10\right]$, $f(x) \leqslant f(10)$ soit $f(x) \leqslant 1\,529 < 2\,500$.
   Le parc n'a aucun risque de refuser des personnes.

EXERCICE 4 — 6 POINTS

Commun à tous les candidats

1. $f(0) = -2$ et $f'(0) = 10$
2. **a.** Pour tout $x \in [0~;~5]$,
   $f'(x) = a \times \mathrm{e}^{-x} + (ax-2) \times -\mathrm{e}^{-x} = (a - (ax-2))\,\mathrm{e}^{-x}) = (-ax+a+2)\mathrm{e}^{-x}$
   b. On sait que $f'(0) = 10$ donc $(0+a+2)\mathrm{e}^0 = 10 \iff a+2 = 10 \iff a = 8$.
   c. Donc pour tout $x \in [0~;~5]$,
   $f'(x) = (-ax+a+2)\mathrm{e}^{-x} = (-8x+10)\mathrm{e}^{-x}$ et $f(x) = (8x-2)\mathrm{e}^{-x}$
3. **a.** Pour tout $x \in [0~;~5]$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-8x+10$.
   $-8x+10 \geqslant 0 \iff -8x \geqslant -10 \iff x \leqslant \dfrac{-10}{-8} \iff x \leqslant \dfrac{5}{4}$.

x	0		$\frac{5}{4}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

b. $f(0) = -2$ $\quad f\left(\dfrac{5}{4}\right) = 8\text{e}^{-\frac{5}{4}} \approx 2,292$ $\quad f(5) = 38\text{e}^{-5} \approx 0,256.$

Tableau de variations de la fonction f sur $[0~;~5]$:

x	0		$\frac{5}{4}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$8\text{e}^{-\frac{5}{4}}$	$\searrow$	38e^{-5}

c. Pour tout $x \in [0~;~5]$,
$f(x) = 0 \iff (8x-2)\text{e}^{-x} = 0 \iff 8x - 2 = 0$ car $\text{e}^{-x} \neq 0$ donc $x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet $x = \frac{1}{4}$ comme unique solution sur l'intervalle $[0~;~5]$.

4. a. La première ligne sert uniquement à rentrer la définition de la fonction $f'(x)$.
La seconde ligne permet donc de calculer $f''(x)$: $f''(x) = (8x - 18)\text{e}^{-x}$.

b. Pour tout $x \in [0~;~5]$, $f''(x)$ a le même signe que $8x - 18$. Elle s'annule donc et change de signe pour $x = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$. La courbe représentative de la fonction f va donc admettre un point d'inflexion d'abscisse $x = \dfrac{9}{4}$.

5. a. D'après le tableau des variations, la fonction f admet un maximum pour $x = \dfrac{5}{4} = 1,25$.
Le bénéfice sera donc maximum pour 1 250 grille-pains.

b. Nous avons vu que $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = 8\text{e}^{-\frac{5}{4}}$.

Le bénéfice maximum sera donc de $8\text{e}^{-\frac{5}{4}} \times 100\,000 \approx 229\,204$ euros.