Corrigé du baccalauréat ES Polynésie juin 2006

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Si la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet : au plus une solution
2. Si la fonction f est continue sur $[a\,;\,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
3. Si la fonction f est continue et positive sur $[a\,;\,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal, alors l'aire, en unités d'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Un produit coûte initialement 500 euros. Son prix augmente de 20 %. Si l'on veut revenir au prix initial, il faut diminuer le prix de 100 euros.
   Le prix est passé de 500 à $500 \times 1,20 = 600$ (€).

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

1. **a.** • $\text{O}(0\,;\,0) \in \mathscr{C}_f$, donc $f(0) = 0$;
   • La tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$, donc le nombre dérivé $f'(0) = \ln 2$;
   • $\text{A}(-1\,;\,0) \in \mathscr{C}_f$, donc $f(-1) = 0$;
   • La tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = x + 1$, donc le nombre dérivé $f'(-1) = 1$.

   b. Une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$ est
   $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, soit d'après les résultats précédents :
   $y - 0 = \ln 2(x - 0)$, soit $y = x\ln 2$.

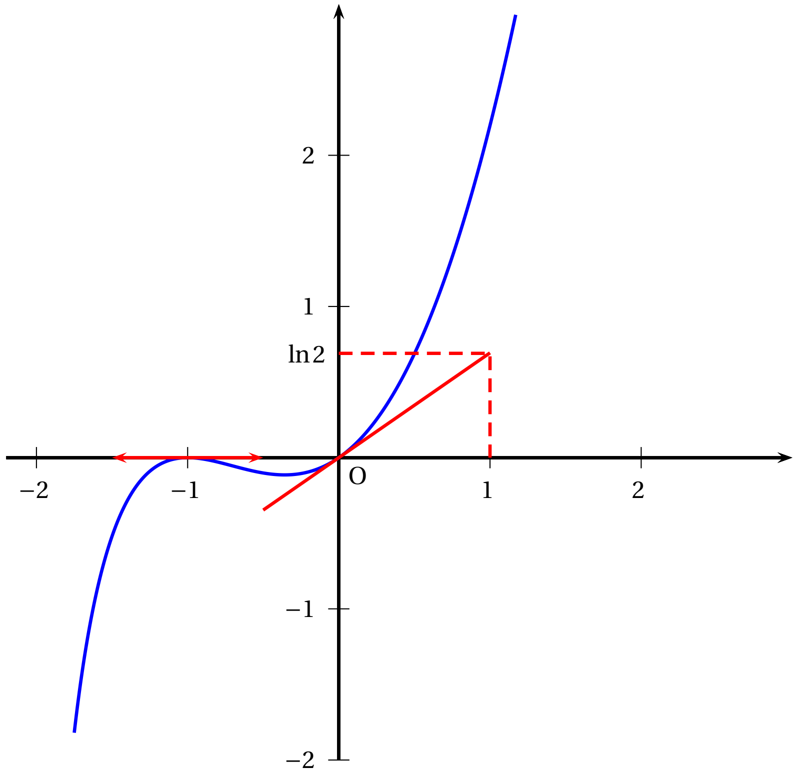
2.
$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\ln(x + 2).$$

   a. On a donc $f(0) = c\ln 2$.

   b. La fonction f produit de fonctions dérivables sur $]-2\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = (2ax + b)\ln(x + 2) + \left(ax^2 + bx + c\right) \times \dfrac{1}{x + 2}$.

   c. On a donc :
   $f'(0) = b\ln 2 + \dfrac{c}{2}$;
   $f'(-1) = (-2a + b)\ln 1 + \dfrac{a - b + c}{1} = a - b + c$.

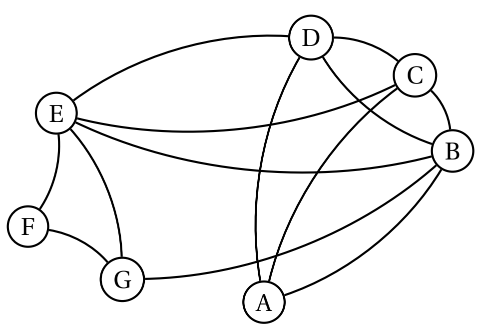
   d. En utilisant les résultats de la question 1, on a donc :
$$\left\{\begin{array}{lcr} f'(0) = \ln 2 & = & b\ln 2 + \dfrac{c}{2}\\ f'(-1) = 0 & = & a - b + c\\ f(0) = 0 & = & c\ln 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} \ln 2 & = & b\ln 2\\ 0 & = & a - b\\ 0 & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} 1 & = & b\\ 0 & = & c\\ b & = & a \end{array}\right.$$
   On a donc $f(x) = \left(x^2 + x\right)\ln(x + 2)$.
   On peut vérifier ce résultat avec le tracé de la courbe représentative de f.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe $\mathscr{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1. Il n'y a pas d'arête entre A et G : le graphe n'est pas complet.
L'ordre de $\mathscr{G}$ est égal au nombre des sommets : 7.

2. a.

Sommet	B	E	C	D	A	G	F
Ordre	5	5	4	4	3	3	2
Couleur	R	B	V	J	B	V	R

On prend une couleur (Rouge), on prend le premier sommet d'ordre la plus élevé (B) et on colorie avec la même couleur en descendant les ordres le ou les sommets non adjacents : ici il n'y a que F.

On recommence avec E en bleu et on colorie en bleu également A, etc.

b. Il faut 4 couleurs, donc le nombre chromatique est inférieur ou égal à 4.

3. a. Le sous graphe formé par les sommets A, B, C et D est lui complet.

b. Si γ est le nombre chromatique du graphe, comme celui-ci a 5 sommets, on a $\gamma \leqslant 6$.
Comme le sous graphe formé par les sommets A, B, C et D est complet, on a $\gamma \geqslant 4$, donc $4 \leqslant \gamma \leqslant 6$.
Mais on a vu à la question 2 que le nombre chromatique est inférieur ou égal à 4.
Finalement le nombre minimal de couleurs est 4.

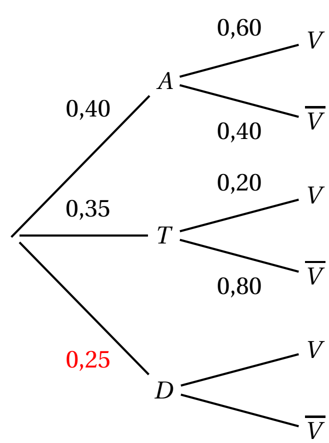
4. a. La matrice associée au graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Le nombre de chemins de longueurs 8 qui relient B à D est dans la matrice M^8 le terme situé à la ligne 2 et à la colonne 4, soit 2 636.

5. a. Il y a deux sommets de degré 5 et deux sommets de degré 3, soit quatre sommets de degré impair ; d'après le théorème d'Euler il n'existe pas de chaîne eulérienne, donc pas d'itinéraire utilisant chaque liaison une et une seule fois.

b. Tous les termes de M^8 sont positifs, donc le graphe est connexe. Pour avoir une chaîne eulérienne, il suffit de rajouter une liaison de façon à n'avoir que deux sommets de degré impair. B et E sont de degré impair mais adjacents, alors que A et G de degré impair ne le sont pas : il suffit donc de rajouter une liaison entre A et G. On aura ainsi la liaison : A–B–C–D–E–F–G.

EXERCICE 3 **5 points**



1. D'après l'énoncé : $p(A) = 0,40$, $p(T) = 0,35$, $p(V) = 0,40$, $p_A(V) = 0,60$ et $p_T(V) = 0,20$.

2. a. On a $p(V \cap A) = p(A \cap V) = p(A) \times p_A(V) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.

b. On a $p(V \cap T) = p(A \cap V) = p(T) \times p_T(V) = 0,35 \times 0,2 = 0,07$.

c. D'après la loi des probabilités totales :
$p(V) = p(A \cap V) + p(A \cap V) + p(D \cap V)$, soit :
$0,40 = 0,24 + 0,07 + p(D \cap V) \iff p(D \cap V) = 0,40 - (0,24 + 0,07) = 0,09$.

3. Il faut trouver $p_V(A) = \dfrac{p(V \cap A)}{p(V)} = \dfrac{0,24}{0,40} = \dfrac{24}{40} = \dfrac{6}{10} = 0,60$.

4. a. La probabilité qu'un voyageur voyage en seconde classe est égale à $1 - 0,60 = 0,40$.
La probabilité que n voyageurs voyagent en seconde classe est égale à $0,4^n$, donc la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe est égale à $p_n = 1 - 0,4^n$.

b. Il faut résoudre l'inéquation :
$p_n > 0{,}9999 \iff 1 - 0,4^n > 0{,}9999 \iff 0,4^n < 1 - 0{,}9999 \iff 0,4^n < 0{,}0001 \iff$
$n \ln 0,4 < \ln 0{,}0001$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0,4}$ (car $\ln 0,4 < 0$).
Or $\dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0,4} \approx 10,05$.
Il faut donc prendre au moins 11 voyageurs.

EXERCICE 4 — 6 points

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^x.$$

1. a. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où par somme de limites :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. On sait que quel que soit le naturel n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$, donc en particulier $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc par somme de limites de la question précédente :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Graphiquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

2. a. La fonction f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet ensemble et :
$f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x + \left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(2x+1+x^2+x+1\right) = \mathrm{e}^x\left(x^2+3x+2\right)$.
Or $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, donc

$$f'(x) = (x+1)(x+2)\mathrm{e}^x.$$

b. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+1)(x+2)$.
Ce produit est positif si $x < -2$ ou si $x > -1$ et négatif sur $]-2\,;\,-1[$, nul en -2 et en -1.

c. On en déduit le tableau de variations de f, avec $f(-2) = 3\mathrm{e}^{-2}$ et $f(-1) = \mathrm{e}^{-1}$:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variations $f(x) \geqslant \mathrm{e}^{-1} > 0$: la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Soit la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par :

$d(x) = \left(x^2 + x + 1\right) \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \left(x^2 + x\right) = x(x+1)\mathrm{e}^x$.

Cette fonction a le signe de $x(x+1)$, soit :

$d(x) > 0$ si $x < -1$ ou $x > 0$;

$d(x) < 0$ si $-1 < x < 0$;

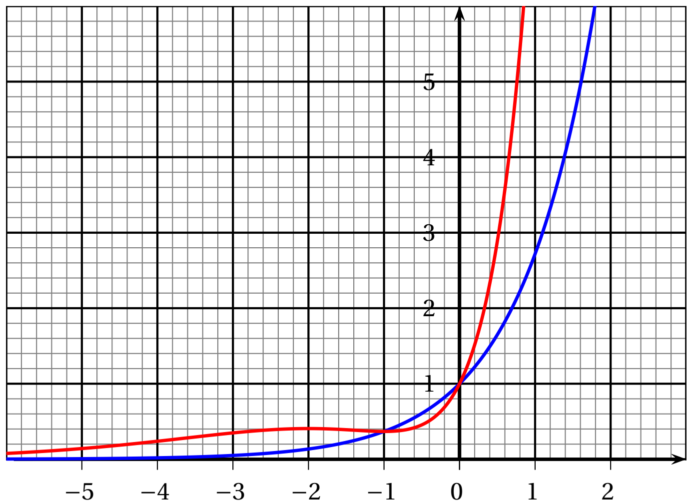
$d(-1) = d(0) = 0$.

Géométriquement :

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_{\text{exp}}$ sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$;

$\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\mathscr{C}_{\text{exp}}$ sur $]-1\,;\,0[$;

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{\text{exp}}$ ont deux points communs de coordonnées $\left((-1\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right)$ et $((0\,;\,1)$.



b.

5. $F(x) = \left(x^2 - x + 2\right) \mathrm{e}^x$.

Sur $\mathbb{R}$, F est dérivable et sur cet intervalle :

$F'(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x + \left(x^2 - x + 2\right) \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \left(2x - 1 + x^2 - x + 2\right) = \mathrm{e}^x \left(x^2 + x + 1\right) = f(x)$: F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. **a.** On a vu que sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$, donc f étant continue sur cet intervalle, la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ est égale à l'intégrale ;

$\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1) =$

$\left(0^2 - 0 + 2\right) \mathrm{e}^0 - \left(\left((-1)^2 - (-1) + 2\right) \mathrm{e}^{-1}\right) = 2 - 4\mathrm{e}^{-1} \approx 0,53$.

b. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, donc la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}'$ délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{\text{exp}}$, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_{-1}^{0} \left[\mathrm{e}^x - f(x)\right]\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - F(x)\right]_{-1}^{0} = \mathrm{e}^0 - F(0) - \left(\mathrm{e}^{-1} - F(-1)\right) =$

$1 - \mathrm{e}^{-1} - (F(0) - F(-1)) = 1 - \mathrm{e}^{-1} - (2 - 4\mathrm{e}^{-1}) = 3\mathrm{e}^{-1} - 1 \approx 0,10$.