Corrigé du baccalauréat ES Polynésie juin 2007

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. La fonction ln étant strictement croissante pour des nombres positifs, la fonction composée a les mêmes variations que f.
2. On a $g'(x) = 4 - \dfrac{2}{x}$, d'où $g'(1) = 4 - 2 = 2$.
   $g(1) = 4 - 2 \times \ln 1 = 4$.
   Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :
   $y - g(1) : g'(1)(x-1) \iff y - 4 = 2(x-1) \iff y = 2x - 2 + 4 \iff y = 2x + 2$.
3. Il faut que $x > 0$ et que $2x + 3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}$. Les solutions sont donc à trouver dans les réels supérieurs à zéro.
   $2\ln x = \ln(2x+3) \iff \ln x^2 = \ln(2x+3) \iff x^2 = 2x+3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff$
   $(x+1)(x-3) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$.
   Seule la solution 3 est à retenir.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.

	Magie	Théâtre	Photo numérique	Total
Adultes	18	45	27	90
Enfants	30	24	6	60
Total	48	69	33	150

2. **a.** Il y a 90 adultes donc 60 enfants. La probabilité que la personne appelée soit un enfant est donc égale à $\dfrac{60}{150} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

   b. $p_A(N) = \dfrac{p(A \cap N)}{p(A)} = \dfrac{\frac{27}{150}}{\frac{90}{150}} = \dfrac{27}{90} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.

   c. Sur les 150 personnes 45 sont des adultes ayant choisi le théâtre, d'où :
   $p(A \cap T) = \dfrac{45}{150} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
3. Par différence on trouve que 48 personnes sur 150 ont choisi la magie. La probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est $\dfrac{48}{150} = \dfrac{6 \times 8}{6 \times 25} = \dfrac{8}{25} = \dfrac{32}{100} = 0,32$.
4. On a $p_M\left(\overline{A}\right) = \dfrac{30}{48} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$.
   Or $\dfrac{5}{8} \neq \dfrac{2}{3}$ (car $5 \times 3 \neq 8 \times 2$).
5. On a une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et de probabilité $p = p(M) = 0,32$.
   La probabilité qu'une seule personne sur les trois ait choisi la magie est égale à :
   $3 \times 0,32 \times (1 - 0,32)^2 = 0,96 \times 0,68^2 = 0,443\,904$ soit au centième près 0,44.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $2\times 3^2-8\times 3+2^2-6\times 2+18=18-24+4-12+18=4\neq 3$, donc le point A n'appartient pas à la surface.

b. La cote de B est $z_B=2\times 5^2-8\times 5+2^2-6\times 2+18=50-40+4-12+18=20$

c. Avec $y=2$ l'équation devient $z=2x^2-8x+4-12+18 \iff$
$z=2x^2-8x+10$: on reconnait l'équation d'une parabole qui est donc la section de la surface par le plan vertical $y=2$.

2. **a.** L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x+y=5$ est le plan vertical dont la trace sur le plan $x\text{O}y$ est la droite d'équation $y=5-x$.

b. On a : $\left\{\begin{array}{lcl} z &=& 2x^2-8x+y^2-6y+18\\ x+y &=& 5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 2x^2-8x+y^2-6y+18\\ y &=& 5-x\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} z &=& 2x^2-8x+(5-x)^2-6(5-x)+18\\ y &=& 5-x\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} z &=& 2x^2-8x+25+x^2-10x-30+6x+18\\ y &=& 5-x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z &=& 3x^2-12x+13\\ y &=& 5-x\end{array}\right.$
L'ensemble des points est donc une parabole située dans le plan vertical dont la trace sur le plan $x\text{O}y$ est la droite d'équation $y=5-x$.

c. $3x^2-12x+13$ est un trinôme qui admet un minimum (car $a=3>0$) pour $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-12}{2\times 3}=2$.
On a donc $y=5-x=5-2=3$ et $z=3\times 2^2-12\times 2+13=1$.
Le coût minimum est donc de 1 000 €.

d. On a vu que la trace du plan d'équation $x+y=5$ est la droite d'équation $y=5-x$.
Le point C_1 a pour coordonnées $(2\,;3)$.

ANNEXE 1 : Exercice 2 (spécialité)

À rendre avec la copie

Figure 1

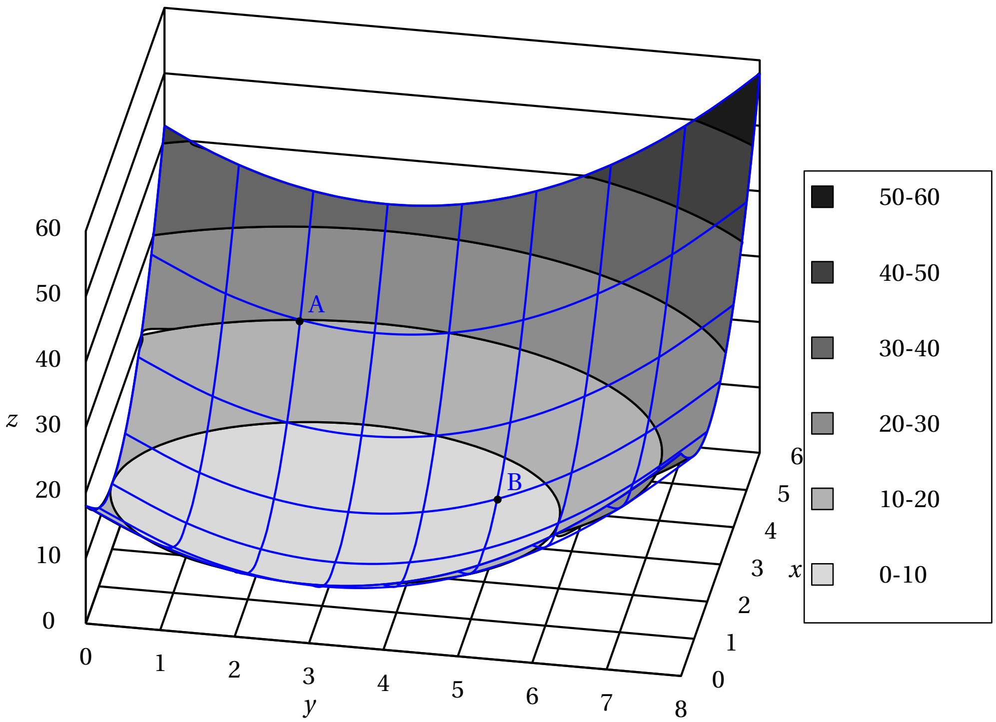
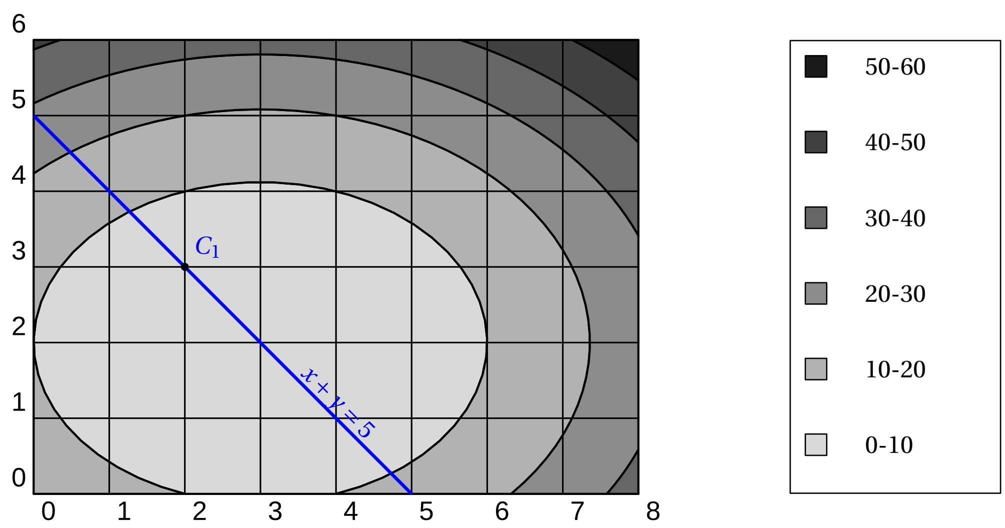


Figure 2



EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. • De 1999 à 2000, l'augmentation est égale à $\dfrac{332-179}{179}\times 100 = \dfrac{153}{179}\times 100 \approx 85,47$ soit à l'unité près 85 %.

 • De 2000 à 2001, l'augmentation est égale à $\dfrac{584-332}{332}\times 100 = \dfrac{252}{332}\times 100 \approx 75,9$ soit à l'unité près 76 %.

 • De 1999 à 2001, l'augmentation est égale à $\dfrac{584-179}{179}\times 100 = \dfrac{405}{332}\times 100 \approx 226,2$ soit à l'unité près 226 %.

 Or $226 \neq 85+76$: on ne peut pas ajouter ces augmentations.

2. **a.**

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln(y_i)$	5,19	5,81	6,37	7,00	7,89	8,33

 b. La calculatrice donne après arrondis au centième des coefficients : $z = 0,64x + 4,51$.

 c. 2008 correspond au rang $x = 10$, d'où $z = 0,64\times 10 + 4,51 = 6,4 + 4,51 = 10,91$. Or $z = \ln y = 10,91 \iff y = \text{e}^{10,91} \approx 54\,720,8$ soit au millier d'euros près 54 720 milliers d'euros.

3. **a.** Le montant des ventes en 2006 est donc $5\,027(1-0,10) = 5\,027\times 0,9 = 4\,524,3$ soit au millier d'euros près 4 524 milliers d'euros.

 b. En 2008 après trois années de baisse de 10 % chaque année le montant des ventes devrait être de :

 $5\,027\times 0,9^3 = 3\,664,68$ soit à l'unité près 3 665 milliers d'euros.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. • $f(1) = -2\times 1 + \left(\text{e}^2-1\right)\ln 1 + 2 = -2+0+2 = 0$.
 • $f\left(\text{e}^2\right) = -2\times\text{e}^2 + \left(\text{e}^2-1\right)\ln\left(\text{e}^2\right) + 2 = -2\text{e}^2 + \left(\text{e}^2-1\right)\times 2 + 2 = -2\text{e}^2 + 2\text{e}^2 - 2 + 2 = 0$.

2. À l'aide du graphique, déterminer approximativement :

 a. On lit approximativement que le bénéfice maximum 3 000 €est obtenu pour la vente de 320 appareils.

 b. On lit que le bénéfice est positif quand la vente va de 100 à 740 appareils.

3. **a.** Sur $]0~;~+\infty[$, la fonction est dérivable et sur cet intervalle :

 $f'(x) = -2 + \left(\text{e}^2-1\right)\times\dfrac{1}{x} : \dfrac{-2x+\text{e}^2-1}{x}$.

 b. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur : $-2x+\text{e}^2-1$:

 • $f'(x) > 0 \iff -2x+\text{e}^2-1 > 0 \iff 2x < \text{e}^2-1 \iff x < \dfrac{\text{e}^2-1}{2}$: sur $\left]0~;~\frac{\text{e}^2-1}{2}\right[$ la fonction est strictement croissante ;

 • $f'(x) < 0 \iff -2x+\text{e}^2-1 < 0 \iff 2x > \text{e}^2-1 \iff x > \dfrac{\text{e}^2-1}{2}$: sur $\left]\frac{\text{e}^2-1}{2}~;~+\infty\right[$ la fonction est strictement décroissante.

 • $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{\text{e}^2-1}{2}$ en ce point la fonction a un maximum $f\left(\frac{\text{e}^2-1}{2}\right)$.

 c. D'après la question précédente le bénéfice est maximal pour $x = \frac{\text{e}^2-1}{2} \approx 3,194$ soit environ 319 appareils vendus.

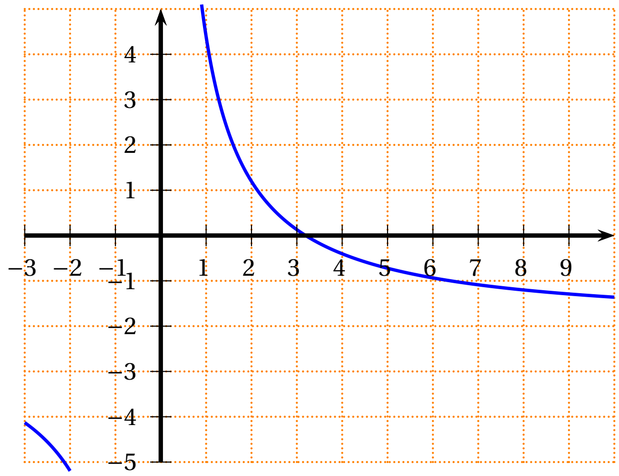
4. Si F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$, alors $F'(x) = f(x)$: le signe de f est donc celui de F'.
Donc F_1 est à éliminer car sur $[1~;2]\,f$ est positive et F est décroissante, donc $F'(x) < 0$;
Même chose pour F_3 : sur $[6~;7]$, $f(x) > 0$ et $F'(x) < 0$.
Il reste donc F_2.

5. En utilisant la primitive F_2, on a donc :
$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F_2(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2} = F\left(\mathrm{e}^2\right) - F(1) \approx 9,3 - (-3,3) \approx 12,6$ unités d'aire

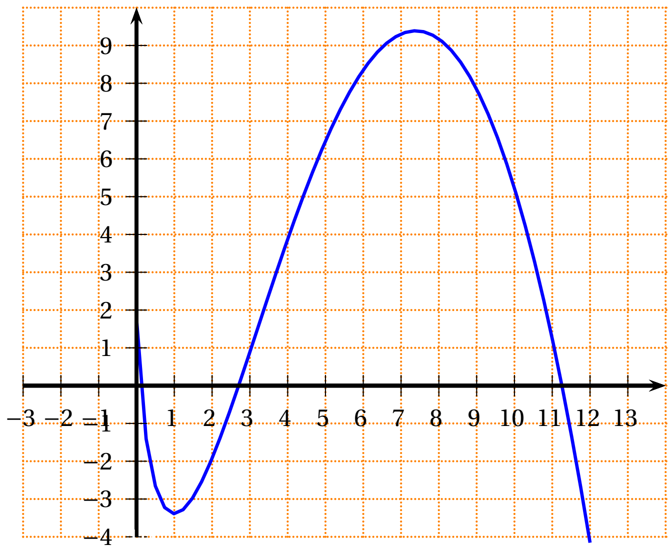
6. a. F est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$F'(x) = -2x + 3 - \mathrm{e}^2 + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)\ln x + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)x \times \dfrac{1}{x} = -2x + 3 - \mathrm{e}^2 + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)\ln x + \mathrm{e}^2 - 1 =$
$-2x + 2 + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)\ln x = f(x)$, donc F est bien une primitive de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
Rem : On peut donc vérifier la question précédente :
$F\left(\mathrm{e}^2\right) - F(1) = -\left(\mathrm{e}^2\right)^2 + \left(3 - \mathrm{e}^2\right) \times \mathrm{e}^2 + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)\mathrm{e}^2 \ln \mathrm{e}^2 - \left[-1^2 + \left(3 - \mathrm{e}^2\right) + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)1\ln 1\right] =$
$-\mathrm{e}^4 + 3\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}^4 - 2 + 1 - 3 + \mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e}^2 - 2 \approx 12,78$ unités d'aire.

b. La valeur moyenne du bénéfice sur intervalle $\left[1~;~\mathrm{e}^2\right]$ est égal à :
$m = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2 - 1}\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2 - 1}\left[F(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2 - 1}\left(2\mathrm{e}^2 - 2\right) = \dfrac{2\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)}{\mathrm{e}^2 - 1} = 2$ soit 2 000 €.

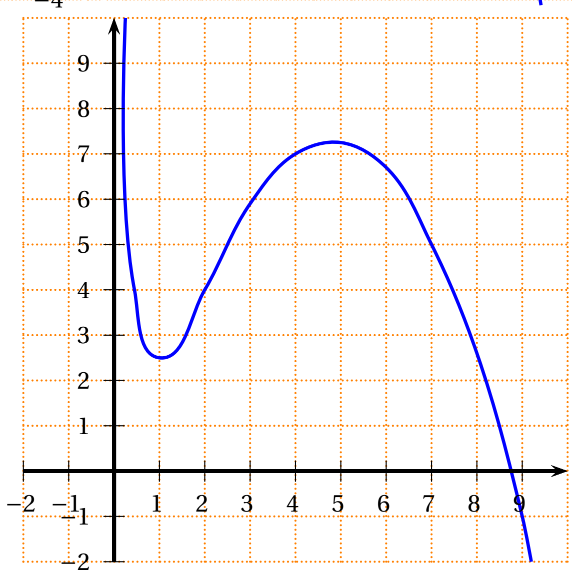
ANNEXE : exercice 4



Courbe de F_1



Courbe de F_2



Courbe de F_3