# Corrigé du baccalauréat ES Polynésie juin 2008

## Exercice 1 — 4 points

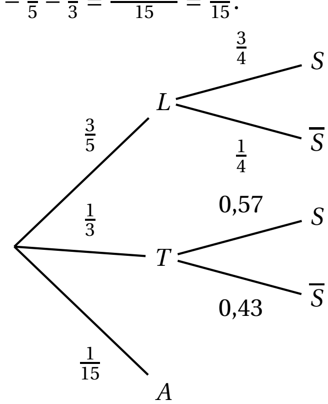
*Commun à tous les candidats.*

1. L'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$ est égale à 3.
2. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$ soit $\dfrac{0-3}{1-0} = -3$.
3. La valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ est égale à la hauteur du rectangle OBAE donc à $\dfrac{179}{75}$ (le repère est orthonormé).
4. On voit qu'il y a deux tangentes horizontales à la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, donc deux solutions pour l'équation $f'(x) = 0$.

## Exercice 2 — 5 points

*Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.*

1. On a $p(A) = 1 - p(L) - p(T) = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15-9-5}{15} = \frac{1}{15}$.




2. $p(L \cap S) = p(L) \times p_L(S) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{20}$.
3. D'après la loi des probabilités totales, on a :
   $p(S) = p(L \cap S) + p(T \cap S)$.
   Or $p(T \cap S) = p(T) \times p_T(S) = \dfrac{1}{3} \times 0,57 = 0,19$.
   Donc $p(S) = p(L \cap S) + p(T \cap S) = \dfrac{9}{20} + 0,19 = 0,45 + 0,19 = 0,64$.
4. Il faut trouver :
   $p_S(L) = \dfrac{p(S \cap L)}{p(S)} = \dfrac{0,45}{0,64} = 0{,}703\,125 \approx 0,70$.
5. On a une loi binomiale avec $n = 3$ et $p = p(S) = 0,64$.
   La probabilité que Marc ne soit satisfait du prix de vente d'aucun des trois objets est :
   $(1 - 0,64)^3$.
   La probabilité que Marc ne soit satisfait du prix de vente que d'un seul des trois objets est :
   $3 \times 0,64 \times (1 - 64)^2$.
   Donc la probabilité qu'à la fin des enchères, Marc soit satisfait du prix de vente d'au moins deux de ces jeux vidéo est égale à : $1 - (1 - 0,64)^3 - 3 \times 0,64 \times (1 - 64)^2 = 0{,}704\,512 \approx 0,70$.

## Exercice 2 — 5 points

*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. **a.** On regarde s'il existe une chaîne eulérienne.

   La chaîne A–B–C–E–D–G–F contient tous les sommets : pour toute paire de sommets différents il existe donc une chaîne démarrant à l'un et se terminant à l'autre.

   Les sommets ont dans l'ordre alphabétique pour ordre : 3, 4, 4, 3, 4, 4, 2.

   Dans ce graphe connexe il y a deux sommets de degré impair : il existe donc une chaîne eulérienne commençant par A ou D et finissant par D ou A.

   **b.** Comme il y a deux sommets de degré impair il n'existe pas de cycle eulérien; il est donc impossible d'emprunter une seule fois chaque voie en revenant au point de départ.

2. **a.** Les sommeront rangés dans l'ordre alphabétique. , $M^3$ est la matrice dont les termes donnent le nombre de chaînes de longueur 3 reliant deux sommets.

   Ainsi il y a deux chaînes de longueur 3 reliant E et G. Or les termes de $T$ à la cinquième ligne septième colonne ou septième ligne cinquième colonne sont nuls, donc $T$ ne peut être égale à $M^3$. C'est donc $M^3 = N$.

   **b.** De F à E en passant par deux sommets exactement est un chemin de longueur 3 : le nombre de chemins est situé dans $M^3$ à la cinquième ligne, sixième colonne, soit 11 chemins différents.

3. Pour trouver le chemin le plus court reliant A à G on utilise l'algorithme de Dijska :

| A | B | C | D | E | F | G | Sommet choisi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | A 0 |
| | A 7 | A 11 | $\infty$ | $\infty$ | A 13 | $\infty$ | B 7 |
| | | A 11 | B 23 | B 21 | A 13 | $\infty$ | C 11 |
| | | | B 23 | C 20 | A 3 | $\infty$ | F 13 |
| | | | B 23 | C 20 | | F 31 | E 20 |
| | | | B 23 | | | F 31 | D 23 |
| | | | | | | D 28 | G 28 |

À partir de G marqué on remonte D, B et A.

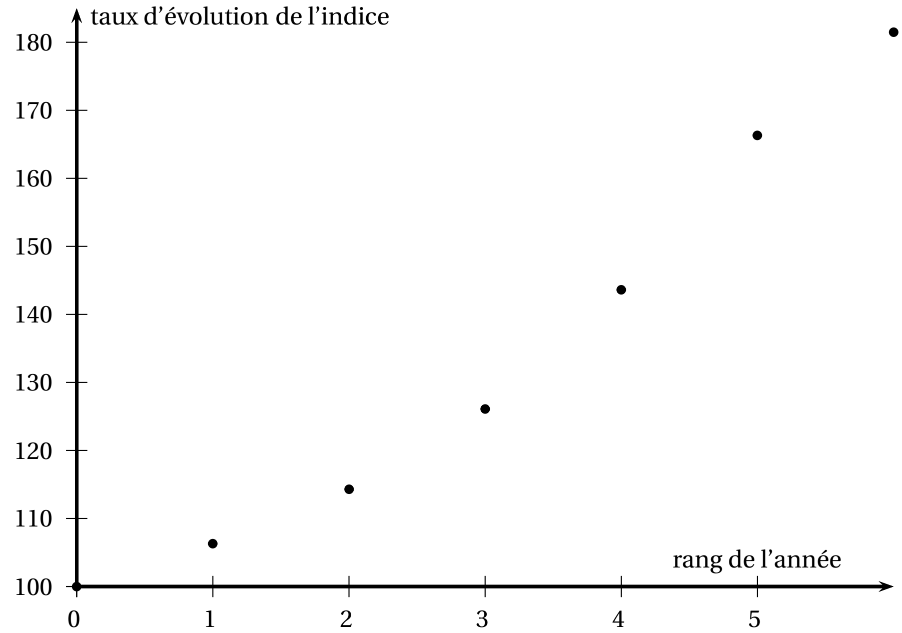
Le chemin le plus court est A–B–D–G ; il prendra 28 minutes.

## Exercice 3 — 4 points

*Commun à tous les candidats.*

1. De 2000 à 2006 l'indice est passé de 100 à 181,5 a donc été multiplié par 1,815, soit une augmentation de 81,5 %.

2.




**3.**

| Rang $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i = \ln y_i$ | 4,605 | 4,606 | 4,739 | 4,837 | 4,967 | 5,114 | 5,201 |

**4.** **a.** Après arrondi au millième des coefficients trouvés avec la calculatrice on a : $z = 0,104x + 4,564$.

**b.** On a $z = \ln y = 0,104x + 4,564 \iff y = \mathrm{e}^{0,104x+4,564} \iff y = \mathrm{e}^{4,564} \times \mathrm{e}^{0,104x}$.
Or $\mathrm{e}^{4,564} \approx 95,967$, d'où $y \approx 95,967\mathrm{e}^{0,104x}$.

**5.** **a.** $96\mathrm{e}^{0,104n} \geqslant 250 \iff \mathrm{e}^{0,104n} \geqslant \dfrac{250}{96} \iff \mathrm{e}^{0,104n} \geqslant \dfrac{125}{48} \iff 0,104n \geqslant \ln\left(\dfrac{125}{48}\right) \iff n \geqslant \dfrac{1}{0,104}\ln\left(\dfrac{125}{48}\right)$.
Or $\dfrac{1}{0,104}\ln\left(\dfrac{125}{48}\right) \approx 9,2$. Le plus petit naturel est donc $n = 10$ donc en 2010.

**b.** Le résultat précédent signifie qu'à partir de 2010 l'indice des prix dépassera les 250.

## Exercice 4 — 7 points

*Commun à tous les candidats.*

**1.** On a :

- $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$;
- $g(\alpha) = 0$;
- $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

**2.**

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} + 2x - 5.$$

**a.** On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\ln x}{x} = +\infty$ et enfin par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

**b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**3.** **a.** La fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\ln x}{x^2} + 2 = -\frac{2}{x^2} - \frac{1-\ln x}{x^2} + 2 = 2 + \frac{\ln x - 3}{x^2} =$$
$$\frac{\ln x + 2x^2 - 3}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

**b.** Comme $x^2 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$ trouvé à la question **1.**, donc

- $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$ : la fonction $f$ est décroissante sur $]0\,;\,\alpha[$
- $f'(\alpha) = 0$ ;
- $f'(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$ : la fonction $f$ est croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

On a $g(\alpha) = \ln\alpha + 2\alpha^2 - 3 = 0 \iff \ln\alpha = 3 - 2\alpha^2$.

Donc $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} + 2\alpha - 5 = \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{3-2\alpha}{\alpha} + 2\alpha - 5 = \dfrac{3-\alpha}{\alpha} + 2\alpha - 5 = \dfrac{3}{\alpha} + 2\alpha - 6 \approx -1{,}08$.

D'où le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\approx -1{,}08$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**c.** On a $f(\mathrm{e}) = \dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}} + 2\mathrm{e} - 5 = \dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} + 2\mathrm{e} - 5 = 2\mathrm{e} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} - 5 \approx 0{,}804 > 0$.

Donc pour $x > \mathrm{e}$, $f(x) > 0$.

**4.** Soit $h$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

**a.** La fonction $h$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$h'(x) = 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x = \dfrac{2\ln x}{x}$.

**b.** Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ est $x \longmapsto 2\ln x$ ;

Une primitive de $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}h'(x)$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}h(x)$ ;

Une primitive de $x \longmapsto 2x$ est $x \longmapsto x^2$ ;

Une primitive de $x \longmapsto -5$ est $x \longmapsto -5x$.

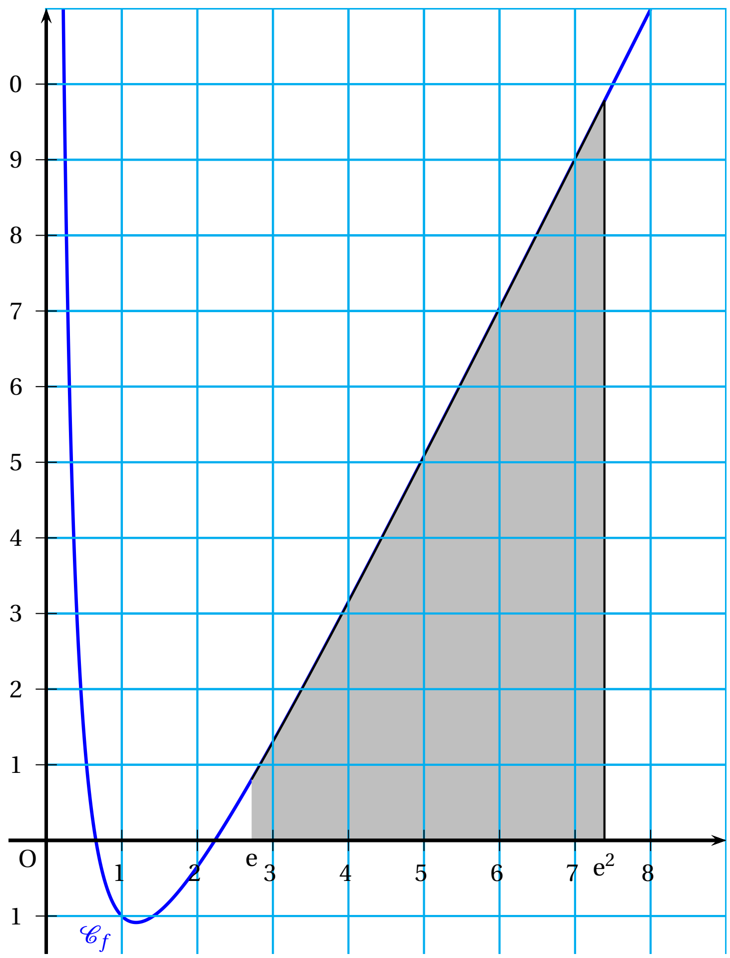
Donc une primitive de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est la fonction $F$ définie par :

$F(x) = 2\ln x - \dfrac{1}{2}h(x) + x^2 - 5x = 2\ln x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + x^2 - 5x$.

**c.** On a vu que sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$, donc l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \mathrm{e}$ et $x = \mathrm{e}^2$ est égale à l'intégrale :

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = F\left(\mathrm{e}^2\right) - F(\mathrm{e}) = 2\ln\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\left(\ln\mathrm{e}^2\right)^2 + \left(\mathrm{e}^2\right)^2 - 5\mathrm{e}^2 - \left[2\ln\mathrm{e} - \frac{1}{2}(\ln\mathrm{e})^2 + \mathrm{e}^2 - 5\mathrm{e}\right] =$$
$$4 - 2 + \mathrm{e}^4 - 5\mathrm{e}^2 - 2 + \frac{1}{2} - \mathrm{e}^2 + 5\mathrm{e} = \frac{1}{2} + \mathrm{e}^4 - 6\mathrm{e}^2 + 5\mathrm{e} \approx 24{,}355 \approx 24{,}4 \text{ unités d'aire.}$$

On peut vérifier approximativement ce résultat sur la figure ci-dessous.


0
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
1
2
e
3
4
5
6
7
e2
8
1
$\mathscr{C}_f$