Corrigé du baccalauréat ES Polynésie septembre 2006

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. $f'(0)$ nombre dérivé de f en 0 est égal au coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$; on lit sur la figure $\dfrac{2}{1} = 2$: réponse **b.**
2. Il y a trois solutions : réponse **b.**
3. Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$ la fonction est positive, donc l'intégrale est égale à l'aire de la surface limitée par la courbe l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$. Il y a manifestement plus dans 10 carreaux unités dans cette surface : réponse **c.**
4. La fonction g est définie lorsque $f(x) > 0$, soit sur l'intervalle $]-1\ ;\ 6[$: réponse **a.**
5. $g(0) = \ln f(0) = \ln \frac{5}{2} = \ln 2,5$: réponse **c.**
6. Ce coefficient directeur est égal à $g'(0)$.

   Comme $g = \ln f$, alors pour $f(x) > 0$, $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, d'où $g'(0) = \dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{2}{2,5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$: réponse **c.**
7. D'après la question précédente $g'(x) = 0 \iff f'(x) = 0$: il y a deux tangentes horizontales en C et E, mais l'abscisse de E n'est pas dans l'ensemble de définition de g : réponse **c.**
8. On a $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to -1} \ln[f(x)] = -\infty$: réponse **b.**

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $i_{10} = i_0 \times 1,10^3 \times 1^4 \times 0,90^3 \approx 97,0299$ soit au centième près 97,03.

   La baisse est donc de 2,97 %.

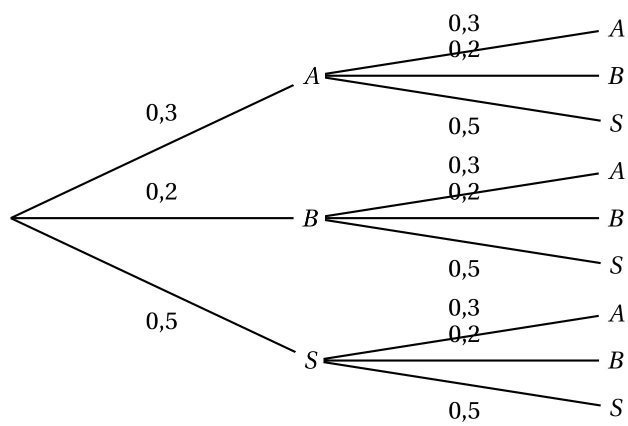
   b. Chaque jour l'indice est multiplié par 1,1 ; la suite (i_n) est donc une suiute géométrique de raison 1,1 et de premier terme $i_0 = 100$.

   On sait qu'alors $i_n = i_0 \times 1,1^n = 100 \times 1,1^n$.

   Il faut résoudre l'inéquation :

   $100 \times 1,1^n > 1000 \iff 1,1^n > 10 \iff n \ln 1,1 > \ln 10 \iff n > \dfrac{\ln 10}{\ln 1,1}$.

   Comme $\dfrac{\ln 10}{\ln 1,1} \approx 24,2$, il faut donc attendre le 25e jour de hausse.
2. **a.**



b.

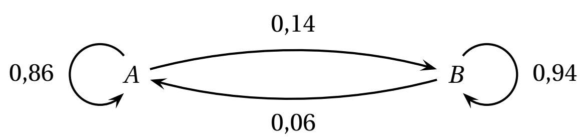
x_i	81	90	99	100	110	121
p_i	0,04	0,2	0,12	0,25	0,3	0,09

c. On a $E(X) = 81 \times 0,04 + 90 \times 0,2 + 99 \times 0,12 + 100 \times 0,25 + 110 \times 0,3 + 121 \times 0,09 = 102,01$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. a. On a $M = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,14 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$.

On a $E_n = E_0 \times M^n$.

b. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0,86 \times 0,86 + 0,14 \times 0,06 & 0,86 \times 0,14 + 0,14 \times 0,94 \\ 0,06 \times 0,86 + 0,94 \times 0,06 & 0,06 \times 0,14 + 094 \times 0,94 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0,748 & 0,252 \\ 0,108 & 0,892 \end{pmatrix}$.

La matrice représentant l'état à l'étape 2, le 1er janvier 2007 est

$E^2 = \begin{pmatrix} 1100 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,86 & 0,14 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1100 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,748 & 0,252 \\ 0,108 & 0,892 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 866 & 634 \end{pmatrix}$.

Le 1er janvier 2007, le club A aura 866 abonnés et le club B 634.

3. a. On a les deux relations :

$\begin{cases} a_{n+1} & = & 0,86a_n + 0,06b_n \\ a_n + b_n & = & 1100 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{n+1} & = & 0,86a_n + 0,06b_n \\ b_n & = & 1100 - a_n \end{cases} \iff$

$\begin{cases} a_{n+1} & = & 0,86a_n + 0,06(1500 - a_n) \\ a_n + b_n & = & 1500 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a_{n+1} & = & 0,86a_n + 90 - 0,06a_n \\ a_n + b_n & = & 1500 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{n+1} & = & 0,8a_n + 90 \\ a_n + b_n & = & 1100 \end{cases}$

b. On a pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = a_{n+1} - 450 = 0,8a_n + 90 - 450$ soit $u_{n+1} = 0,8a_n - 360$ ou $u_{n+1} = 0,8\left(a_n - \frac{360}{0,8}\right) = 0,8(a_n - 450)$, d'où finalement :

$$u_{n+1} = 0,8u_n,$$

relation qui montre que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,8, de premier terme $u_0 = a_0 - 450 = 1100 - 450 = 650$.

c. On sait que quel que soit le naturel n,n $u_n = u_0 \times 0,8^n = 650 \times 0,8^n$.

Or $u_n = a_n - 450 \iff a_n = u_n + 450$, d'où finalement :

$$a_n = 450 + 650 \times 0,8^n.$$

d. Comme $0 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 650 \times 0,8^n = 0$ et enfin :

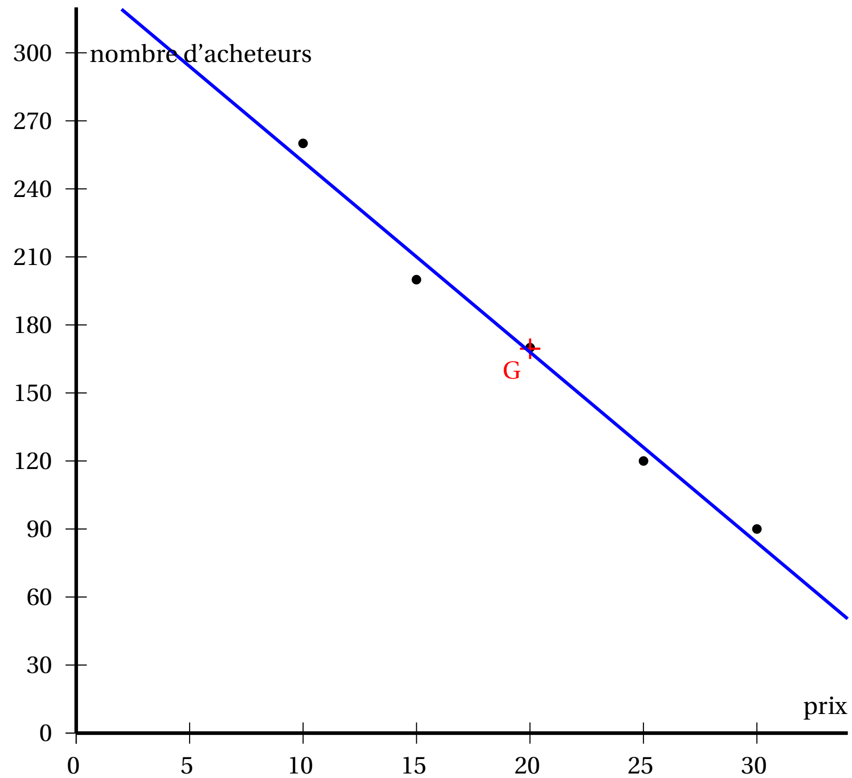
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 450.$$

Cela signifie qu'au bout d'un certain nombre d'années le nombre d'abonnés au club A va décroître et se stabiliser à 450 (donc celui du club B se rapprochera de 1 050).

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1.



Les coordonnées du point moyen G sont :

$x_G = \dfrac{30+25+20+15+10}{5} = 20$ et $y_G = \dfrac{90+120+170+200+260}{5} = 168$.

2. La calculatrice donne $y = -8,4x + 336$ comme une équation de la droite de régression D par la méthode des moindres carrés.

3. Avec $y = 300$, on obtient :

$300 = 336 - 8,4x \iff 8,4x = 36 \iff x = \dfrac{36}{8,4} \approx 4,286$ soit au centième près 4,29 centaines d'euros ou 429 €.

4. **a.** On a $R(x) = xy = x(336 - 8,4x) = 336x - 8,4x^2$.

b. R est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[5\,;30]$ et sur cet intervalle :

$R'(x) = 336 - 2 \times 8,4x = 336 - 16,8x$.

- $R'(x) = 0 \iff 336 = 16,8x \iff x = \dfrac{336}{16,8} = 20$;
- $R'(x) > 0 \iff 336 - 16,8x > 0 \iff 336 > 16,8x \iff 20 > x$;
- $R'(x) > 0 \iff 336 - 16,8x < 0 \iff 336 < 16,8x \iff 20 < x$.

Du signe de la dérivée de R, on en déduit que :

- R est croissante sur $[5\,;20]$ de $R(5) = 336 \times 5 - 8,4 \times 5^2 = 1\,470$ à $R(20) = 336 \times 20 - 8,4 \times 20^2 = 3\,360$,
- R est décroissante sur $[20\,;30]$ de $R(20) = 3\,360$ à $R(30) = 2\,520$.
- $R(20) = 3\,360$ est donc le maximum de la recette sur l'intervalle $[5\,;20]$.

Conclusion : la recette 336 000 € sera maximale pour un prix de vente de 2 000 €.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous tes candidats

Partie A : Observation graphique

1. Courbe $\mathscr{C}_1$: le maximum est atteint au bout de une heure et vaut à peu près 1,45.
   Courbe $\mathscr{C}_2$: le maximum est atteint au bout de une heure 30 minutes et vaut à peu près 0,55.
2. Courbe $\mathscr{C}_1$: au bout de 3 heures, le taux est environ de 0,6 : non-respect de la législation.
   Courbe $\mathscr{C}_2$: au bout de 3 heures, le taux est environ de 0,4 : respect de la législation.

Partie B : Modélisation

1. On a $f_2'(t) = a\mathrm{e}^{bt} + abt\mathrm{e}^{bt} = a\mathrm{e}^{bt}(1 + bt)$.
   $f_2'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0 \iff a\mathrm{e}^{b\times\frac{3}{2}}\left(1 + b \times \frac{3}{2}\right) = 0 \iff \mathrm{e}^{b\times\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3b}{2}\right) = 0$; comme $\mathrm{e}^{b\times\frac{3}{2}} > 0$, il en résulte que $1 + \frac{3b}{2} = 0 \iff \frac{3b}{2} = -1 \iff b = -\frac{2}{3}$.
2. On a donc : $3a\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\times 3} \approx 0,4 \iff a \approx \frac{0,4}{3}\mathrm{e}^2$, soit $a \approx 0,985$ ou $a \approx 1$ à 0,1 près.
   Donc $f_2(t) = t\mathrm{e}^{-\frac{2t}{3}}$.
3. $f_1(t) = t\mathrm{e}^{-\frac{2t}{3}} \iff 4t\mathrm{e}^{-t} = t\mathrm{e}^{-\frac{2t}{3}} \iff t = 0$ (solution évidente) ou $4\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-\frac{2t}{3}} \iff 4 = \mathrm{e}^{\frac{t}{3}} \iff \frac{t}{3} = \ln 4 \iff t = 3\ln 4$. Or $3\ln 4 \approx 4,159$ soit 4 h 9 min 54 s, donc à peu près 4 h 10 min (ou au temps 0).
   Ce temps représente le temps au bout duquel le taux d'alcool sera le même que l'absorbtion ait été faite à jeun ou après ingestion d'aliments.