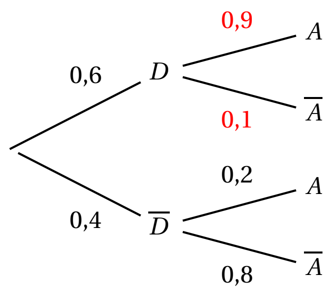
Corrigé du baccalauréat ES (obligatoire) Polynésie septembre 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats



1. On a $p(D) = 0,6$, d'où $p\left(\overline{D}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$.
2. **a.** 80 % de ces clients choisissent une crêpe sucrée, donc
   $p_{\overline{D}}(A) = 1 - 0,8 = 0,2$.

   b. $P\left(A \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{D} \cap A\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(A) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$.

   c. D'après la formule des probabilités totales :
   $p(A) = P(A \cap D) + P\left(A \cap \overline{D}\right)$ soit :
   $P(A \cap D) = p(A) - P\left(A \cap \overline{D}\right) = 0,62 - 0,08 = 0,54$.

   d. D'après la formule des probabilités totales :
   $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,54}{0,6} = 0,9$.
3. $P_A\left(\overline{D}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(A)} = \dfrac{0,08}{0,62} = \dfrac{4}{31} \approx 0,1290 \approx 0,129$ au millième près.
4. La probabilité de vendre une crêpe sucrée est égale à : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,62 = 0,38$.
   La variable aléatoire, recette prend deux valeurs 2 et 3 de probabilités respectives 0,38 et 0,62.
   L'espérance mathématique de cette recette est :
   $2 \times 0,38 + 3 \times 0,62 = 0,76 + 1,86 = 2,62$ € par crêpe vendue, soit pour 250 crêpes : $250 \times 2,62 = 655$ €.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Fausse : la dérivée de la fonction est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}$.
2. Vraie. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^x + 4 > 4 > 0$, l'équation est donc équivalente à $\mathrm{e}^x - 1 = 0$ qui a bien pour seule solution 0.
3. Vraie. $\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^n \leqslant 0,7 \iff \left(\dfrac{99}{100}\right)^n \leqslant 0,7 \iff n \ln\left(\dfrac{99}{100}\right) \leqslant \ln 0,7 \iff n \ln 0,99 \leqslant \ln 0,7 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,7}{\ln 0,99}$ car $\ln 0,99 < 1$.

4. **4.** Fausse. Il faut que $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)>0$: le trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]-3\,;\,-1[$.
Il faut aussi que $5x+9>0 \iff x>-\dfrac{-9}{5}$.
Finalement il faut que $x>-1$.
Dans ces conditions : $\ln\left(x^2+4x+3\right)=\ln(5x+9) \iff x^2+4x+3=5x+9 \iff x^2-x-6=0$.
On a $\Delta=1+24=25=5^2$, d'où deux solutions :
$x_1=\dfrac{1+5}{2}=3$ et $x_2=\dfrac{1-5}{2}=-2$: x_2 ne peut être solution.

5. **5.** Fausse. Avec $x<1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sqrt{1-x}=0$, d'où par composition de limites $\displaystyle\lim_{x\to 1}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x}}{2}\right)=-\infty$.

EXERCICE 3 **9 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

1. **1.** $\mathrm{E}(0\,;\,1)\in(\mathscr{C})$, donc $f(0)=1$.
La tangente en E est horizontale donc $f'(0)=0$.
2. **2.** $f'(x)=a\mathrm{e}^{-x}-(ax+b)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(a-ax-b)$.
3. **3.** $\mathrm{E}(0\,;\,1)\in(\mathscr{C}) \iff b\mathrm{e}^0=1 \iff b=1$;
$f'(x)=0 \iff \mathrm{e}^0(a-0-b)=0 \iff a-b=0 \iff a=b=1$.
Finalement : $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$

Partie B

1. **1. a.** On a $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}(x+1)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
b. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ et
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=0$, d'où par suite des limites :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.
c. Géométriquement le résultat précédent montre que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.
2. **2. a.** On a vu que $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(a-ax-b)=-x\mathrm{e}^{-x}$.
b. Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$ quel que soit x, $f'(x)$ est du signe de $-x$ donc $f'(x)\leqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction est donc strictement décroissante de $f(0)=1$ à 0.
3. **3. a.** Sur l'intervalle la fonction f est continue, car dérivable, strictement décroissante de $f(0)=1>0,5$ à $f(4)=5\mathrm{e}^{-4}\approx 0,091<0,5$; d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe donc un réel unique $\alpha\in[0\,;\,4]$ tel que $f(\alpha)=0,5$.
b. La calculatrice donne successivement :
$f(1)\approx 0,73$ et $f(2)\approx 0,40$, donc $1<\alpha<2$;
$f(1,6)\approx 0,52$ et $f(1,)\approx 0,49$, donc $1,6<\alpha<1,7$;
$f(1,67)\approx 0,502$ et $f(1,68)\approx 0,499$, donc $1,67<\alpha<1,68$;
$f(1,678)\approx 0,5001$ et $f(1,679)\approx 0,4998$, donc $1,678<\alpha<1,679$.
4. **4.** On a $g'(x)=-1\mathrm{e}^{-x}-[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}]=\mathrm{e}^{-x}(-1+x+2)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}=f(x)$: g est donc une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

5. On a donc $m = \dfrac{1}{4-0}\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}[g(x)]_0^4 = \dfrac{1}{4}[g(4) - g(0)] =$
$\dfrac{1}{4}\left[-(4+2)\mathrm{e}^{-4}\right] - \dfrac{1}{4}\left[-(0+2)\mathrm{e}^{-0}\right] = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}4725$ soit au millième près 0,473.

Partie C

1. 4 000 pièces correspondent à $q = 4$.
Le prix de revient d'une pièce est donc égal à $f(4) = 5\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}091578$ €.
La coût de production de 4 000 pièces est donc égal à :
$4000 \times 0{,}091578 \approx 366{,}3$ soit 366 € à l'euro près.
2. Il faut trouver le plus petit entier q tel que $f(q) < 0{,}5$:
Or on a vu que $f(\alpha) = 0{,}5$ et que $\alpha \approx 1{,}679$.
Le coût de revient sera inférieur au demi-euro à partir de 1 679 pièces produites.