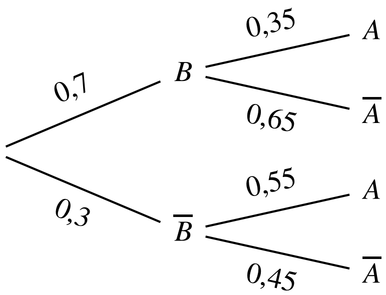
Exercice 1 :

Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'arbre pondéré modélisant la situation est :



2. Les événements B et $\overline{B}$ forment une partition de l'ensemble des visiteurs, donc :
$p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}7 \times 0{,}35 + 0{,}3 \times 0{,}55 = 0{,}41$.
3. On recherche $p_A(B)$:
$p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0{,}7 \times 0{,}35}{0{,}41} \approx 0{,}598 > 0{,}5$.
Le directeur va proposer la location des audio-guides par Internet.

Partie B

1. On cherche $p(T \leqslant 6)$:
$p(T \leqslant 6) = 0{,}5 - p(6 \leqslant T \leqslant 10) \approx 0{,}023$ à la calculatrice.
2. $p(6 \leqslant T \leqslant 14) = p(10 - 2 \times 2 \leqslant T \leqslant 10 + 2 \times 2) \approx 0{,}954$ selon le cours.
3. $p(T \geqslant a) = 0{,}25 \iff 1 - p(T < a) = 0{,}25 \iff p(T < a) = 0{,}75$.
À la calculatrice, on trouve $a \approx 11{,}3$.

   Sur un grand nombre de visiteurs, 25 % restent plus de 11 minutes et 18 secondes.
4. Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion $p = 0{,}25$:

   — $n = 720 \geqslant 30$; $n \times p = 180 \geqslant 5$; $n(1-p) = 540 \geqslant 5$
   Les conditions de validité du calcul de l'intervalle de fluctuation sont réunies.

   — Borne inférieure :
   $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}25 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}25 \times 0{,}75}}{\sqrt{720}} \approx 0{,}218$ par défaut.

   — Borne supérieure :
   $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}25 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}25 \times 0{,}75}}{\sqrt{720}} \approx 0{,}282$ par excès.

   L'intervalle cherché est $I_{720} = [0{,}218\ ;\ 0{,}282]$.
   Par ailleurs, la fréquence observée dans cet échantillon de visiteurs passant plus de 15 minutes dans la boutique est :
$$f_{\text{obs}} = \frac{161}{720} \approx 0{,}224$$
   $f \in I_{720}$ donc on accepte l'hypothèse selon laquelle 25 % des visiteurs passent plus de 15 minutes dans la boutique, au risque d'erreur de 5 %.

Exercice 2 :

Commun à tous les candidats

1. **Réponse D**.
   Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % d'une fréquence f donnée pour un échantillon de taille n est :
   $$I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
   Borne inférieure : $\dfrac{817}{3000} - \dfrac{1}{\sqrt{3000}} \approx 0{,}254$ par défaut.
   Borne supérieure : $\dfrac{817}{3000} + \dfrac{1}{\sqrt{3000}} \approx 0{,}291$ par excès.
   Donc $I_c = [0{,}254\ ;\ 0{,}291]$.
2. **Réponse B**.
   36 % de 4 200 est $4200 \times 0{,}36 = 1512$.
3. **Réponse B**.
   — Algorithme A : N n'est pas itéré dans la boucle « Tant Que » mais seulement à la fin de l'algorithme.
   — Algorithme C : il n'y a pas d'itération sur N.
   — Algorithme D : la condition sur A est fausse, il faut effectuer la boucle « Tant Que », tant que $A < 30000$. Si on fait tourner cet algorithme, il n'exécutera pas les instructions contenues dans la boucle.
4. **Réponse C**.
   Soit T la variable aléatoire associée au temps d'attente, $T \sim \mathcal{U}\big([1\ ;\ 10]\big)$.
   $p(T \geqslant 5) = p(5 \leqslant T \leqslant 10) = \dfrac{10-5}{10-1} = \dfrac{5}{9}$.

Exercice 3 :

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L.

1. a) Le 1er juillet 2019, le loueur ce sera séparé de 20 % de son parc, il lui restera donc 80 % des 150 vélos au départ, soit 120 vélos.
   Mais il faut rajouter les 35 nouveaux vélos.
   Le 1er juillet 2019, il y aura 155 vélos à la location.
   b) Le nombre de vélos de l'année $n+1$ est obtenu en conservant 80 % des vélos de l'année n, soit $0{,}8 \times u_n$ auxquels on rajoute les 35 nouveaux vélos.
   D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 35$.
2. a) La formule qu'il faut inscrire dans la cellule B3 est :
   $$=0{,}8 * \text{B2} + 35$$
   b) Au vu des données du tableur, il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 175$.
3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 175$.
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 175 \\ &= 0{,}8u_n + 35 - 175 \\ &= 0{,}8u_n - 140 \\ &= 0{,}8\left(u_n - \frac{140}{0{,}8}\right) \\ &= 0{,}8(u_n - 175) \\ &= 0{,}8v_n \end{aligned}$$
   Par définition, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 175 = -25$.

b) Puisque (v_n) est une suite géométrique, son terme général en fonction de n s'écrit :

$$v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0{,}8^n$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 175$ soit $u_n = 175 + v_n$. En remplaçant v_n par son expression, on obtient :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 175 - 25 \times 0{,}8^n$$

c) $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ et en ajoutant 175 à chaque membre, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n + 175 = 0 + 175$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 175$.

4. — On peut utiliser le tableur de la calculatrice, et on obtient le tableau suivant :

6	168,446 4
7	169,757 12
8	170,805 696

C'est donc pour $n \geqslant 8$ que le nombre de vélos dépassera 170, c'est à dire à partir du 1^er juillet 2026.

— On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_n &\geqslant 170 \\ 175 - 25 \times 0{,}8^n &\geqslant 170 \\ -25 \times 0{,}8^n &\geqslant \underbrace{170 - 175}_{=-5} \\ 0{,}8^n &\leqslant \underbrace{\frac{-5}{-25}}_{=0{,}2} \end{aligned}$$

la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

$$\begin{aligned} \ln(0{,}8^n) &\leqslant \ln(0{,}2) \\ n \times \ln(0{,}8) &\leqslant \ln(0{,}2) \end{aligned}$$

$0{,}8 < 1$ donc $\ln(0{,}8) < 0$

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}8)}$$

$\dfrac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}8)} \approx 7{,}2$.

Finalement, $u_n \geqslant 170$ dès que l'entier $n \geqslant 8$.
À partir du 1^er juillet 2026, le nombre de vélos à la location dépassera 170 selon ce modèle.

Exercice 3 :
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a) Le graphe n'est pas complet car tous les sommets ne sont pas adjacents 2 à 2, par exemple M et P.
   b) La chaîne M - E - F - P - V - R passe par tous les sommets du graphe donc deux sommets quelconques peuvent toujours être reliés par une chaîne. Le graphe est connexe.
2. Construisons le tableau indiquant le degré de chaque sommet :

Sommet	E	F	M	R	V	P
Degré	4	4	2	3	3	4

Le graphe est connexe et possède deux sommets de degré impair et deux seulement, selon le théorème d'Euler, le graphe possède une chaîne eulérienne dont les extrémités sont les sommets R et V.

Le restaurateur pourra donc organiser une visite de tous ses producteurs en empruntant une et une seule fois chaque route. Il devra partir de chez lui et arrivera en fin de circuit chez le vigneron.

Un exemple d'un tel parcours est :

R - E - P - F - M - E - F - V - P - R - V

3. a) La matrice d'adjacence N est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant deux sommets du graphe est donné par les cœfficients de la matrice N^3.

   On cherche donc le cœfficient $m_{1,6}$ de N^3, on trouve $m_{1,6} = 5$.

   Il existe donc 5 chemins de longueur 3 reliant l'éleveur au vigneron.

4. Construisons l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le plus court chemin allant de chez le restaurateur au maraîcher.

R	E	P	V	F	M
0	5R	4R	10R	∞	∞
	5R	4R	9P	11P	∞
	5R		9P	11E P	13E
			9P	10V	13E
				10V	12F
					12F

Le chemin le plus court entre le restaurateur et le maraîcher est de 12 km et il faut passer par :

$$R \longrightarrow P \longrightarrow V \longrightarrow F \longrightarrow M$$

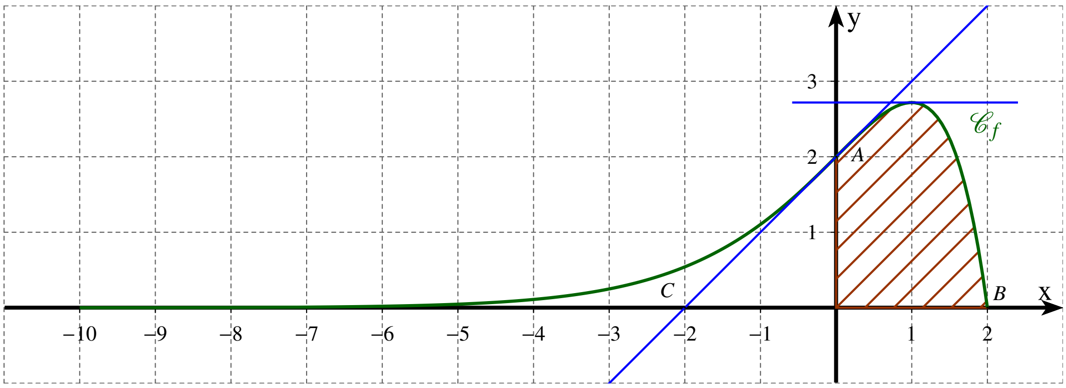
Exercice 4 :

Commun à tous les candidats

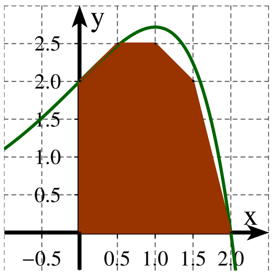
Partie A

1. $f(0) = 2$ car $A\ (0~;~2) \in \mathscr{C}_f$.
   $f(2) = 0$ car $B\ (2~;~0) \in \mathscr{C}_f$.
2. $f'(1) = 0$ car la tangente au point d'abscisse 1 à $\mathscr{C}_f$ est horizontale.
3. D'après l'énoncé, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est la droite (AC) donc son cœfficient directeur m est donné par :
   $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-2}{-2-0} = 1$.
   Donc (AC) a pour équation réduite $y = x + p$, où p est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse 0. Soit $p = 2$.
   Finalement, $(AC) : y = x + 2$.
4. On trace la droite d'équation $y = 1$ et on cherche le nombre de points d'intersection entre cette droite et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-10~;~2]$.
   $f(x) = 1$ possède 2 solutions.

5. Par lecture graphique, il semble que :
   — f soit croissante sur $[-10\ ;\ 1]$;
   — f soit décroissante sur $[1\ ;\ 2]$.
6. Par lecture graphique, il semble que :
   — f soit convexe sur $[-10\ ;\ 0]$;
   — f soit concave sur $[0\ ;\ 2]$.
7. a)

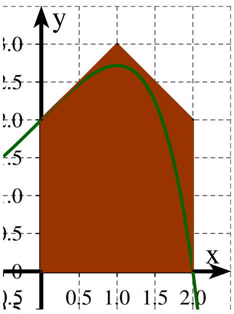


   b) Le polygone ci-dessous minore l'aire du domaine cherché (chaque carreau valant 0,25 UA) :



   Il y a 16 carreaux donc l'aire du domaine est minorée par 4.

   Le polygone ci-dessous majore l'aire du domaine cherché (chaque carreau valant 0,25 UA) :



   Il y a 20 carreaux, soit 5 UA.

   Finalement, l'aire du domaine est encadrée par les entiers 4 et 5 : $4 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 5$.

Partie B

1. $f(0) = 2 \times \mathrm{e}^0 = 2$ et $f(2) = (2-2)\mathrm{e}^2 = 0$.
2. a) $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1-x)$.
   b) $f'(1) = \mathrm{e}^1(1-1) = 0$

3. L'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$f'(0) = \mathrm{e}^0(1-0) = 1$ et $f(0) = 2$, d'où :

$$T_A : y = x + 2$$

4. a) Pour tout $x \in [-10\ ;\ 2]$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de la fonction affine $x \mapsto 1 - x$. On en déduit le tableau de variation :

x	-10		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1\mathrm{e}^{-10}$	$\searrow$	e	$\nearrow$	0

b) Sur $[-10\ ;\ 1]$:

f est continue et strictement croissante.

$\left.\begin{array}{l} f(-10) = 12\mathrm{e}^{-10} < 1 \\ f(1) = \mathrm{e} > 1 \end{array}\right\}$ donc 1 est compris entre $f(-10)$ et $f(1)$.

D'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution α dans $[-10\ ;\ 1]$.

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -1{,}15$.

Sur $[1\ ;\ 2]$:

f est continue et strictement décroissante.

$\left.\begin{array}{l} f(1) = \mathrm{e} > 1 \\ f(2) = 0 < 1 \end{array}\right\}$ donc 1 est compris entre $f(1)$ et $f(2)$.

D'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution β dans $[1\ ;\ 2]$.

À la calculatrice, on trouve $\beta \approx 1{,}84$.

5. Le logiciel de calcul formel nous fournit que : $f''(x) = -x\mathrm{e}^x$.

Or, pour tout $x \in [-10\ ;\ 2]$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-x$. D'où le tableau de signes de $f''(x)$:

x	-10		0		2
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f		convexe		concave	

6. a) Pour tout $x \in [-10\ ;\ 2]$, $F'(x) = -\mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2-x) = f(x)$.

F est une primitive de f sur $[-10\ ;\ 2]$.

b) $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \mathrm{e}^2 - 3 \approx 4{,}39$ UA.