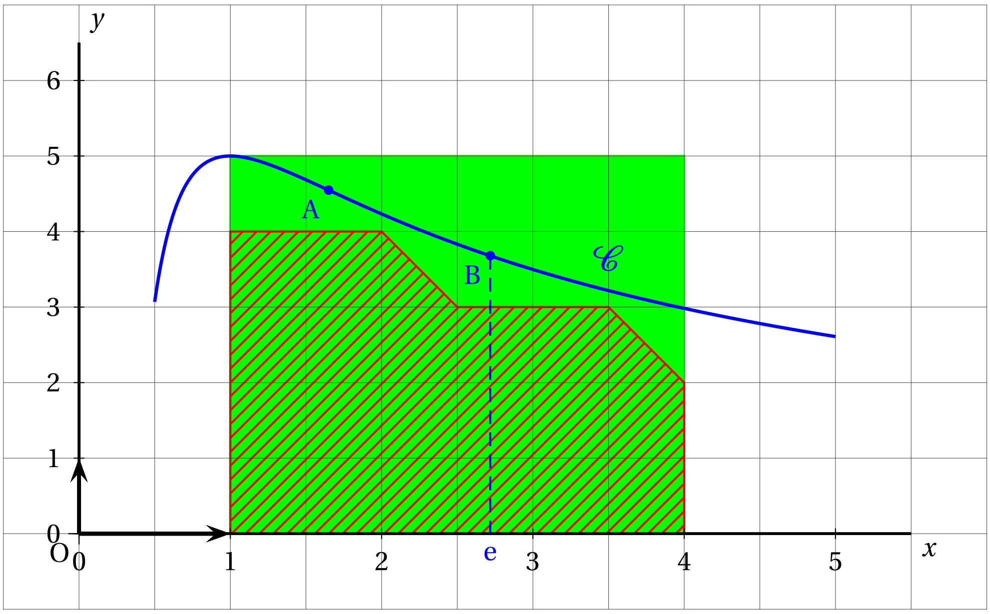
Corrigé du baccalauréat E.S. Pondichéry 4 mai 2018

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats



1. La fonction f' est :

a. positive ou nulle sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$

b. négative ou nulle sur l'intervalle $[1\,;\,5]$

c. négative ou nulle sur l'intervalle $[0,5\,;\,1]$

Solution : explication donnée à titre indicatif

Sur $[0,5\,;\,5]$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-5\ln x$, donc de $-\ln x$.

Comme sur $[1\,;\,5]$, $\ln x \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant 0$: f est décroissante sur $[1\,;\,5]$

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égal à :

a. $-\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$ **b.** $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$ **c.** $\dfrac{5}{\mathrm{e}^3}$

Solution : explication donnée à titre indicatif

B a pour abscisse e. On a $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{-5\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} = -\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$.

3. La fonction f' est :

a. croissante sur l'intervalle $[0,5\,;\,1]$

b. décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,5]$

c. croissante sur l'intervalle $[2\,;\,5]$

Solution : explication donnée à titre indicatif

sur $[0,5\,;\,5]$, $f''(x) \geqslant 0 \iff 10\ln(x) - 5 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 0,5 \iff x \geqslant \sqrt{\mathrm{e}}$

on en déduit que f' est décroissante sur $\left[0,5\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,5\right]$ or $\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1,6$

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ est égale à :

a. 1,65 **b.** 1,6 **c.** $e^{0,5}$

Solution : explication donnée à titre indicatif
f'' s'annule et change de signe en $\sqrt{e} = e^{0,5}$ d'après l'explication précédente

5. On note $\mathscr{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

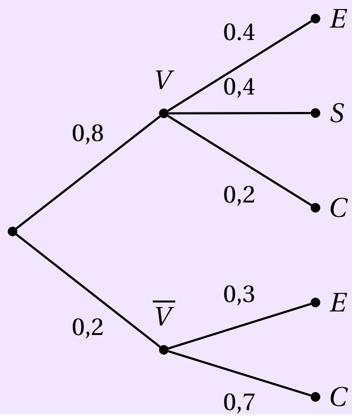
a. $20 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 30$ **b.** $10 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 15$ **c.** $5 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$

Solution : explication donnée à titre indicatif
La surface est totalement contenue dans un rectangle d'aire 15 u.a. (en vert) et contient entièrement polygone d'aire 10 u.a. (en rouge) donc $10 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 15$.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats
Partie A

1. **a.** **Solution :**
« 80 % *de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à* 30 €. » donc $P(V) = 0,8$
« 40 % *paient avec une carte bancaire en mode sans contact* » donc $P_V(S) = 0,4$

b. **Solution :**



2. **a.** **Solution :** on cherche $P(V \cap S)$
$P(V \cap S) = P(V) \times P_V(S) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$

b. **Solution :** On cherche $P\left(\overline{E}\right)$
$P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E)$
V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales on a :

$P(E) = P(E \cap V) + P\left(E \cap \overline{V}\right)$

$= P(V) \times P_V(E) + P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(E)$

$= 0{,}8 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}38$

on a donc bien $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$

Partie B

1. **Solution :** On cherche $P(0 \leqslant X \leqslant 30)$
d'après la calculatrice on a $P(0 \leqslant X \leqslant 30) \approx 0{,}80$

2. **Solution :** On cherche $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu - \sigma)$ car $\mu = 27{,}5$ et $\sigma = 3$ donc $\mu - \sigma = 24{,}5$ et $\mu + \sigma = 30{,}5$.
D'après le cours on sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu - \sigma) \approx 0{,}68$

remarque : si on ne connait pas ce point de cours, on calcule évidemment comme dans la question précédente

Partie C

Solution : l'échantillon est de taille $n = 200$, la fréquence observée de clients satisfaits du mode sans contact est $f = \dfrac{175}{200} = 0{,}875$

On a $n \geqslant 30$, $nf = 175 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 25 \geqslant 5$.

On peut donc bâtir l'intervalle de confiance.

On peut affirmer avec une confiance à 95% que la proportion p de clients satisfaits du mode sans contact devrait appartenir à l'intervalle $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

$f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}804$ et $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \approx 0{,}946$

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95% est donc environ $I = [0{,}80\,;\,0{,}95]$.

Exercice 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **Solution :** $u_1 = 0{,}8u_0 + 18 = 70$ et $u_2 = 0{,}8u_1 + 18 = 74$

2. a. **Solution :**
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0{,}8u_n + 18 - 90 = 0{,}8u_n - 72 = 0{,}8 \times (u_n - 90) = 0{,}8v_n$.
On en déduit que (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 90 = -25$

   b. **Solution :** (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 90 = -25$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times (0{,}8)^n$ or $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 90$
Finalement on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n$

3. **a.** **Solution :**

« Tant que $u < 85$ »

b. **Solution :** en programmant la suite (u_n) sur la calculatrice, on obtient $u_7 \approx 84{,}8 < 85$ et $u_8 \approx 85{,}8$. L'algorithme affichera $n = 8$

On peut aussi programmer l'algorithme sur la machine

c. **Solution :** $u_n \geqslant 85 \iff 90 - 25 \times 0{,}8^n \geqslant 85$

$$\iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}2$$
$$\iff \ln(0{,}8^n) \leqslant \ln(0{,}2)$$
$$\iff n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}2)$$
$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}8)} \qquad \text{car } \ln(0{,}8) < 0$$

or $\dfrac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}8)} \approx 7{,}2$ donc le premier entier supérieur à ce résultat est bien $n = 8$

4. **a.** **Solution :**

Chaque mois 20% des abonnements sont résiliés donc leur nombre est multiplié par $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}8$ de plus, chaque mois on compte 18 nouveaux abonnements on a donc bien,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18$ et comme il y a 65 abonnés en juillet 2017, on a $u_0 = 65$: la suite définie dans la partie A permet donc de modéliser la situation

b. **Solution :**

L'abonnement est vendu 52 € donc une recette de 4 420 € correspond à $\dfrac{4420}{52} = 85$ abonnements souscrits

On cherche donc si $u_n \geqslant 85$ à partir d'un certain rang or on a vu dans la partie A que ceci était réalisé à partir de $n = 8$. Donc la recette mensuelle dépassera 4 420 € à partir de mars 2018.

c. **Solution :**

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ car $-1 < 0{,}8 < 1$ donc par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 90$.

La recette mensuelle de la société Biocagette va donc tendre vers

$90 \times 52 = 4680$ €.

Exercice 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Solution : On applique l'algorithme de DIJKSTRA

A	B	C	D	E	F	G	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	47 A	56 A	∞	23 A	30 A	∞	∞	E
	~~47 A~~ 43 E	56 A	65 E		30 A ~~51 E~~	∞	63 E	F
	43 E	56 A	65 E			∞	~~63 E~~ 58 F	B
		~~56 A~~ 53 B	65 E			∞	58 F	C
			65 E ~~68 C~~			∞	58 F	H
			65 E			81 H		D
						~~81 H~~ 80 D		G

Le chemin le plus court est donc A-E-D-G pour une longueur de 80 km

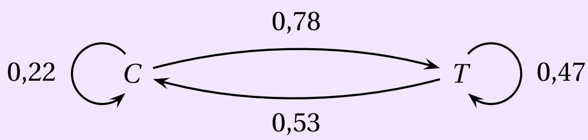
Partie B

1. **a.** **Solution :** L'état probabiliste initial est $P_0 = (1 \quad 0)$ car Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage

b. **Solution :**

L'énoncé donne $P_{T_n}(C_{n+1}) = 0{,}53$ et $P_{C_n}(T_{n+1}) = 0{,}78$

on en déduit $P_{T_n}(T_{n+1}) = 0{,}47$ et $P_{T_n}(T_{n+1}) = 0{,}22$



2. **Solution :**

$M = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}78 \\ 0{,}53 & 0{,}47 \end{pmatrix}$

3. **Solution :**

$P_2 = P_0 \times M^2 = (0{,}4618 \quad 0{,}5382)$

on en déduit que le 3 janvier 2018, la probabilité que Louis décide d'utiliser le covoiturage est d'environ 0,4618

4. **a.** **Solution :** $P = (x \quad y)$ est l'état stable si et seulement si $PM = P$ et $x + y = 1$

$$PM = P \iff \begin{cases} 0{,}22x + 0{,}53y = x \\ 0{,}78x + 0{,}47y = y \end{cases} \iff 0{,}78x - 0{,}53y = 0 \iff 78x - 53y = 0$$

$P = (x \quad y)$ est l'état stable si et seulement si $\begin{cases} 78x - 53y = 0 \\ x + \quad y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 78x - 53y = 0 \\ x + \quad y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 78x - 53(1-x) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{53}{131} \\ y = \frac{78}{131} \end{cases}$$

L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix} \dfrac{53}{131} & \dfrac{78}{131} \end{pmatrix} \approx (0{,}40 \quad 0{,}60)$

b. **Solution :**
À long terme, Louis utilisera plus souvent les transport en commun avec une probabilité se stabilisant aux alentours de 0,60

Exercice 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Solution :** f est dérivable sur $[0\,;\,4]$
on a $f = u\mathrm{e}^{v} - 1{,}4$ donc $f' = u'\mathrm{e}^{v} + uv'\mathrm{e}^{v} = (u' + uv')\mathrm{e}^{v}$
avec $\begin{cases} u(x) = 3{,}6x + 2{,}4 \\ v(x) = -0{,}6x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 3{,}6 \\ v'(x) = -0{,}6 \end{cases}$
finalement, $\forall x \in [0\,;\,4]$, $f'(x) = (3{,}6 - 0{,}6(3{,}6x + 2{,}4))\mathrm{e}^{-0{,}6x} = (-2{,}16x + 2{,}16)\mathrm{e}^{-0{,}6x}$

2. **a.** **Solution :**
$\mathrm{e}^{-0{,}6x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-2{,}16x + 2{,}16) = 2{,}16(1 - x)$ donc du signe de $(1 - x)$

x	0		1		4
$f'(x)$		+	0	-	

b. **Solution :**

x	0		1		4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$

$f(1) = 6\mathrm{e}^{-0{,}6} - 1{,}4 \approx 1{,}89$ et $f(4) = 16{,}8\mathrm{e}^{-2{,}4} - 1{,}4 \approx 0{,}12$

3. **Solution :**
$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^4 = F(4) - F(0) = \left(-38\mathrm{e}^{-2{,}4} - 5{,}6\right) - (-14) = 8{,}4 - 38\mathrm{e}^{-2{,}4} \approx 4{,}95$$

Partie B

1. **Solution :**
$$\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{0,5} 4x^2 - 4x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right]_0^{0,5} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{6}$$

2. **Solution :** L'aire située au dessus de l'axe des abscisses est donnée par
$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x \approx 4,95 - \frac{1}{6} \approx 4,8$$
L'aire totale grisée est donc d'environ 9,6 unités d'aire soit environ 10 u.a.