Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry 3 avril 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Affirmation 1 Fausse. Sur $[1 ; 2]$ la fonction est décroissante dons sur cet intervalle $f'(x) \leqslant 0$.

Affirmation 2 Fausse. Le nombre dérivé $f'(2)$ est égal au coefficient directeur de la droite (BA) soit : $\dfrac{0-\text{e}^2}{2-1} = -\text{e}^2$

Affirmation 3 Vraie. Sur $]-\infty ; 2[$, $F'(x) = f(x) > 0$, donc F est croissante et sur $\left]2 ; \frac{5}{2}\right]$, $F'(x) = f(x) < 0$, donc F est décroissante. $F(2)$ est donc bien un maximum.

Affirmation 4 Vraie. Sur $[-3 ; 1]$, la fonction f est positive, donc l'aire demandée est égale à
$\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_{-3}^{1} = F(1) - F(-3) = 2\text{e} - \frac{6}{\text{e}^3} = \frac{2\text{e}^4 - 6}{\text{e}^3}$

Affirmation 5 Vraie. $\displaystyle\int_0^2 f'(x)\,\text{d}x = [f(x)]_0^2 = f(2) - f(0) = 0 - 2 = -2$.

Affirmation 6 Fausse. La fonction n'est pas définie en 2.

Affirmation 7 Vraie. La fonction tend vers 0 en moins l'infini en restant positive, donc son inverse devient infiniment grand positif.

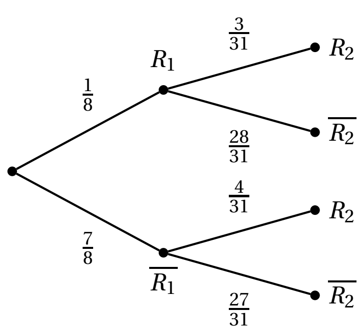
Affirmation 8 Vraie. Quand x tend vers 2 par valeurs inférieures $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers plus l'infini et quand x tend vers 2 par valeurs supérieures $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers moins l'infini.

Rem. Une fonction plausible est la fonction définie par $x \longmapsto f(x) = (2-x)\text{e}^x$, qui a pour primitive $x \longmapsto F(x) = (3-x)\text{e}^x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Sur les 32 cartes il y a 4 rois. Donc $P(R_1) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.
   Si on a tiré un roi il reste 31 cartes et parmi celle-ci restent 3 rois, donc
   $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{3}{31}$.
   Si l'on n'a pas tiré de roi il reste 4 rois dans les 31 cartes restantes, donc $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \dfrac{4}{31}$.
2.



3. $P(\text{A}) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{3}{31} = \dfrac{3}{248} \approx 0,012$.
   $P(\text{B}) = P\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{28}{31} + \dfrac{7}{8} \times \dfrac{4}{31} = \dfrac{28+28}{8 \times 31} = \dfrac{7}{31} \approx 0,226$.

4.

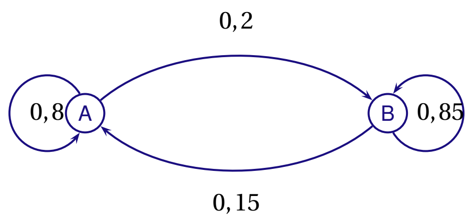
Nombre de bonbons x_i	0	10	20
$P(X = x_i)$	$\frac{189}{248}$	$\frac{56}{248}$	$\frac{3}{248}$

5. On a $E(X) = 0 \times \frac{189}{248} + 10 \times \frac{56}{248} + 20 \times \frac{3}{248} = \frac{560+60}{248} = \frac{620}{248} = \frac{155}{62} = \frac{5\times 31}{2\times 31} = \frac{5}{2} = 2,5$ (bonbons)
Ceci signifie qu'en moyenne sur 10 parties on gagnera environ 25 bonbons.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a.



b. $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

2. a. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ et on sait que :

$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4425 & 0,5575 \end{pmatrix}$.

b. De même $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,4425 & 0,5575 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,437625 & 0,562375 \end{pmatrix}$.

Cela signifie que la deuxième année et la troisième année la société A sera choisie à 44,25 % et respectivement 43,76 %.

3. a. On a $P = P \times M \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 0,8a + 0,15b \\ b & = & 0,2a + 0,85b \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} 0,2a - 0,15b & = & 0 \\ 0,2a - 0,15b & = & 0 \\ b & = & 1-a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,2a - 0,15(1-a) & = & 0 \\ b & = & 1-a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,35a & = & 0,15 \\ b & = & 1-a \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \frac{15}{35} \\ b & = & 1-a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \frac{3}{7} \\ b & = & \frac{4}{7} \end{array}\right.$

Donc $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

b. Comme il n'y a pas de terme nul dans M l'état P_n tend vers un état stable P indépendant de l'état initial tel que $P = P \times M$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{3}{7}$.

c. Le dernier résultat montre qu'à terme 3 touristes sur 7 choisiront la société A.

4. La probabilité qu'aucun des quatre ne choisisse la société A ; la probabilité de cet évènement est $\left(1 - \dfrac{3}{7}\right)^4 = \left(\dfrac{4}{7}\right)^4$.

Donc la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015 est égale à :

$1 - \left(\dfrac{4}{7}\right)^4 = 1 - \dfrac{256}{2401} = \dfrac{2145}{2401} \approx 0,89337$, soit 0,8934 à 10^{-4} près.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

Sur $]0 ; +\infty[$:

$f'(x) = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$; $g'(x) = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$.

Partie 2 : démonstration de la propriété

1. sur $]0 ; +\infty[$:
   - $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$ car $a \neq 0$;
   - $g'(x) = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$
2. On remarque que $f'(x) = g'(x) \iff f'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = k \iff f(x) = g(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. On a donc $f(x) = g(x) + k \Rightarrow f(1) = g(1) + k \iff \ln a = \ln a + \ln 1 + k \iff 0 = k$
4. On a donc finalement $f(x) = g(x) \iff \ln ax = \ln a + \ln x$ (le logarithme népérien transforme le produit en une somme).

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

1. Sur $[0; 9]$, $f(x) = g(x) \iff \dfrac{10}{1+x} - 1 = \dfrac{x}{2} \iff 10 - (1+x) = \dfrac{1}{2}x(1+x) \iff$ $20 - 2 - 2x = x + x^2 \iff x^2 + 3x - 18 = 0$.
   On a $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-18) = 9 + 72 = 81 > 0$. L'équation a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$:
   $$x_1 = \frac{-3+\sqrt{81}}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-3-9}{2} = -6.$$
   Dans $[0; 9]$ il n'y a que la solution 3.
2. $\text{I} = \displaystyle\int_3^9 \left(\frac{10}{1+x} - 1\right) \mathrm{d}x = [10\ln(1+x) - x]_3^9 = 10\ln(1+9) - 9 - [10\ln(1+3) - 3] =$ $10\ln 10 - 10\ln 4 - 6 = 10(\ln 10 - \ln 4) - 6 = 10\ln\left(\frac{10}{4}\right) - 6 = 10\ln\left(\frac{5}{2}\right) - 6$.

1. **a.** On voit sur le graphique que pour $x = 4$, soit 40 € 1 boîte sa achetée.
   Par le calcul : $f(4) = \dfrac{10}{1+4} - 1 = 2 - 1 = 1$, soit 100 boîtes.

   b. On voit sur le graphique que le prix d'équilibre est égal à $x = 3$ soit 30 €.
   La résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$ a été faite dans la partie 1, on a trouvé la solution $x = 3$ soit 30 € pour une production de 150 boîtes.
2. **a.** L'aire du triangle OAE est égale à $\dfrac{\text{OA} \times \text{AE}}{2} = \dfrac{3 \times 1,5}{2} = 2,25$ unité d'aire soit $2,5 \times 1\,000 =$ 2 250 €.
   Le surplus des producteurs est égal à 2 250 €.

   b. Sur l'intervalle $[3; 9]$, la fonction f est positive, donc l'aire de la surface, en unité d'aire, limitée par la courbe l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 9$ est égale à l'intégrale :
   I= $\displaystyle\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x$, intégrale calculée dans la partie 1, égale à $10\ln\frac{5}{2} - 6 \approx 3,1629$, soit à l'euro près 3 163 €.
   Le surplus des consommateurs est à l'euro près 3 163 €.