Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry 12 avril 2007

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

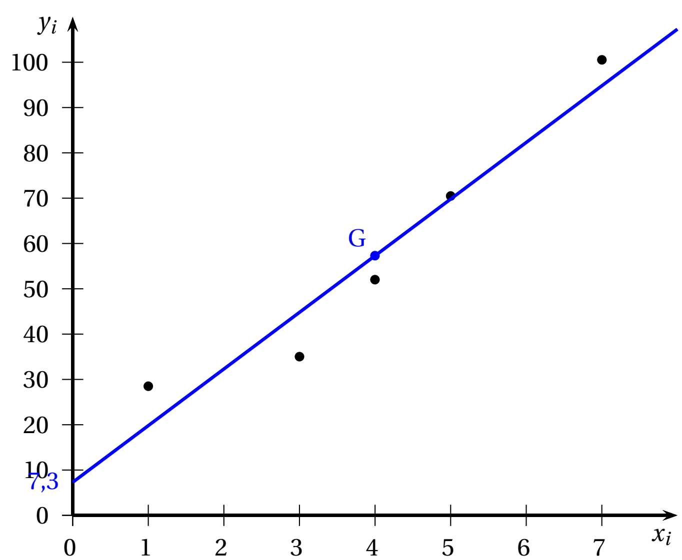
1. **FAUX** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, donc la droite dont une équation est $y = -2$ est asymptote horizontale à la représentation graphique de f.
2. **FAUX** Le tableau de variations montre avec le théorème de la valeur intermédiaire que la fonction f prend trois fois la valeur 2.
3. **ON NE PEUT PAS RÉPONDRE** Sur l'intervalle $]1\,;\,3[$, la fonction est strictement croissante, mais il se peut qu'en un ou plusieurs points le nombre dérivé soit nul.
4. **FAUX** Si F est une primitive de f, alors $F'(x) = f(x)$. Or sur l'intervalle $[3\,;\,8]$, on a $f(x) > 1 > 0$, donc F est croissante.
5. **FAUX** Sur $[3\,;\,+\infty[$, $f(x) > 1 > 0$; or l'inverse d'une fonction positive est positive; d'après le tableau de variations f est décroissante donc son inverse est croissante (de 0,2 à 1)

Partie B :

1. La fonction n'est pas définie si le dénominateur est nul, or $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff$ $\mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$. Réponse **b.**
2. Dans $\mathbb{R} - \{0\}$, $g(x) = 3 \iff \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = 3 \iff 2\mathrm{e}^x = 3(\mathrm{e}^x - 1) \iff$ $2\mathrm{e}^x = 3\mathrm{e}^x - 3 \iff \mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln 3$. Réponse **b.**
3. En multipliant chaque terme par e^{-x}, on obtient :
$g(x) = \dfrac{2}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{2}{1} = 2$. Réponse **c.**

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. On a G(4 ; 57,3)
3. a. On a $G(4\,;\,57,3) \in D \iff 57,3 = 12,5\times 4 + b \iff b = 57,3-50 = 7,3$

   b. Voir ci-dessus
4. 2005 correspond au rang $x = 8$ qui donne $y = 12,5\times 8 + 7,3 = 107,3$ milliers d'euros.
5. L'erreur commise par l'estimation précédente par rapport à la valeur exacte est en pourcentage est égale à :
   $\dfrac{140-107,3}{140}\times 100 = \dfrac{33,7}{140}\times 100 \approx 24,07$ soit à l'unité près 24 %.
6. a.

x_i	1	3	4	5	7	8
$z_i = \ln y_i$	3,35	3,56	3,95	4,26	4,61	4,94

   b. La calculatrice donne après arrondi des coefficients au centième : $z = 0,23x + 3,02$.

   c. On a pour $y > 0$, $z = \ln y = 0,23x + 3,02 \iff y = \mathrm{e}^{0,23x+3,02} = \mathrm{e}^{0,23x}\times \mathrm{e}^{3,02}$.
   Comme $\mathrm{e}^{3,02} \approx 20,491$, on a en arrondissant au centième : $y = 20,49\mathrm{e}^{0,23x}$.

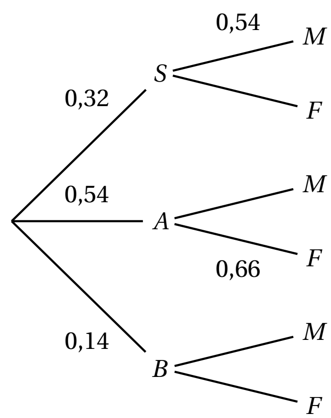
   d. 2007 correspond à $x = 10$, qui donne une estimation de $y = 20,49\mathrm{e}^{0,23\times 10} = 20,49\mathrm{e}^{2,3} \approx 204,371$, soit environ 204 400 € à 100 €près.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. a. $p(S) = 0,32$, $p(A) = 0,54$
   $p(B) = 1-(0,32+0,54) = 1-0,86 = 014$.
   Parmi les Siamois, 54 % sont des mâles, donc $p_S(M) = 0,54$.
   66 % des Abyssins sont des femelles, donc $p_A(F) = 0,66$ et
   Il y a au total 40,96 % de chatons mâles, donc $p(M) = 0,4096$.

   b.



2. a. $p(M\cap S) = p(S)\times p_S(M) = 0,32\times 0,54 = 0,1728$.

   b. On a $p_A(M) = 1 - p_{\mathrm{A}}(F) = 1-0,66 = 0,34$ et
   $p(M\cap A) = p(A)\times p_{\mathrm{A}}(M) = 0,54\times 0,34 = 0,1836$. $p(M\cap A)$

   c. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(M) = p(M\cap S) + p(M\cap A) + p(M\cap B) \iff p(M\cap B) = p(M) - p(M\cap S) - p(M\cap A) = 0,4096 - 0,1728 - 0,1836 = 0,0532$.

   d. $p_B(M) = \dfrac{p(M\cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,0532}{0,14} = 0,38$.

3. On a un schéma de Bernoulli avec comme paramètres $n = 3$ et $p = 0,0532$.
La probabilité d'acheter exactement deux mâles Birmans est :
$3 \times 0,0532^2 \times (1 - 0,0532) = 0,008039 \approx 0,008$.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

$$f(x) = 5\frac{\ln x}{x} + 3.$$

1. a. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
Géométriquement ce résultat montre que la droite dont une équation est $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

b. On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$.
Géométriquement ce résultat montre que la droite dont une équation est $y = 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

2. a. On a $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
Donc $f'(x) = \dfrac{5(1 - \ln x)}{x^2}$ sur $]0~;~+\infty[$.

b. Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $1 - \ln x$:
- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff x < \mathrm{e}$: donc sur $]0~;~\mathrm{e}[$, la fonction est croissante de moins l'infini à $f(\mathrm{e}) = 5 \times \dfrac{1}{\mathrm{e}} + 3 = \dfrac{5}{\mathrm{e}} + 3 \approx 4,84$.
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff x > \mathrm{e}$: sur $]\mathrm{e}~;~+\infty[$ la fonction est décroissante de $f(\mathrm{e})$ à 3.
- $1 - \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}$: la fonction a un maximum $f(\mathrm{e})$.

3. a. On sait que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, donc en posant $u(x) = \ln x$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et on peut écrire
$f(x) = 5\ln x \times \dfrac{1}{x} + 3 = 5u'(x)u(x) + 3$.
Or une primitive de $u'(x)u(x)$ est $\dfrac{u(x)^2}{2}$, donc une primitive sur $]0~;~+\infty[$ de f est la fonction F définie par : $F(x) = \dfrac{5}{2}u^2(x) + 3x = \dfrac{5}{2}(\ln x)^2 + 3x$.

b. On a donc :
$\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_2^4 = F(4) - F(2) = \frac{5}{2}(\ln 4)^2 + 3 \times 4 - \left(\frac{5}{2}(\ln 2)^2 + 3 \times 2\right) =$
$\dfrac{5}{2} \times (2\ln 2)^2 - \dfrac{5}{2}(\ln 2)^2 + 6 = \dfrac{15}{2}(\ln 2)^2 + 6$

4. a. On a vu que sur $[2~;~\mathrm{e}]$ la fonction est croissante de $f(2) = 5\dfrac{\ln 2}{2} + 3 \approx 4,73$ à $f(\mathrm{e})$: elle est donc positive sur cet intervalle.
Sur $[\mathrm{e}~;~4]$, la fonction est décroissante de $f(\mathrm{e})$ à $f(4) = \dfrac{5}{4}\ln 4 + 3 \approx 4,7$: elle est donc positive sur cet intervalle.
Finalement f est positive sur $[2~;~4]$.

b. D'après la question précédente I est donc l'aire en un cités d'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$.

5. La valeur moyennes égale à :
$\dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{15}{2}(\ln 2)^2+6\right] = \dfrac{15}{4}(\ln 2)^2+3$ en milliers d'euros soit environ 4,8017 milliers d'euros soit environ 4 801,70 € et à 100 euros près : 4 800 €.