Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry 16 avril 2009

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Sur 6 issues, 2 sont favorables : 3 et 6; probabilité : $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
2. On sait que $p(\text{A} \cap \text{B})$ =p(A) + p(B) - $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,4$.
3. Réponse 3 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p(\text{B})$
4. On a $\text{E} = 2 \times \dfrac{1}{2} + 3 \times \dfrac{1}{3} + a \times \dfrac{1}{6} = 0 \iff 1 + 1 + \dfrac{a}{6} = 0 \iff \dfrac{a}{6} = -2 \iff a = -12$.

Partie B

Dans cette partie toutes les réponses seront justifiées.

1. **a.** On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = 0,6$.
   La probabilité que Julien ne marque aucun panier est égale à
   $(1 - 0,6)^4 = 0,4^4 = 0,0256$.

   b. La probabilité que Julien marque au moins un panier est
   $1 - 0,0256 = 0,9744$.
2. La probabilité qu'il ne marque aucun panier en n tentatives est $0,4^n$, donc la probabilité de marquer au moins un panier est $1 - 0,4^n$. Il faut donc résoudre l'inéquation :
   $1 - 0,4^n \geqslant 0,999 \iff 0,4^n \leqslant 0,001 \iff n \ln 0,4 \leqslant \ln 0,001 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,4}$.
   Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,4} \approx 7,5$. Il lui faut donc au moins 8 tentatives.

EXERCICE 2 **5 points**

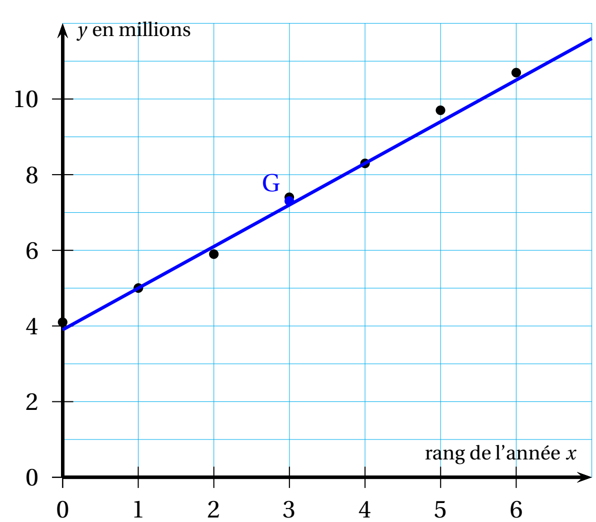
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

On a $\dfrac{16,6 - 13}{13} \times 100 \approx 27,7\,\%$ à 0,1 près.

Partie 2

1.



2. **a.** G(3 ; 7,3)

   b. La calculatrice donne avec des coefficients arrondis au dixième
   $y = 1,1x + 3,9$.

   c. Voir la figure.
   Remarque : avec des coefficients arrondis au dixième le point G n'est pas sur la droite d'ajustement ce qui est anormal. Avec des coefficients au centième ($y = 1,13x + 3,91$) ce problème est résolu.

3. 2010 correspond au rang 7. On aura donc environ :
   $y = 1,1 \times 7 + 3,9 = 7,7 + 3,9 = 11,6$.
   Il y aura en 2010 environ 11,6 millions de retraités.

Partie 3

1. On a donc $R_{1975} = \dfrac{13}{4,1}$ $\quad R_{2005} = \dfrac{16,6}{10,7}$, d'où un pourcentage d'augmentation de 1975 à 2005 égal à :
   $\dfrac{R_{2005} - R_{1975}}{R_{1975}} \times 100 = \dfrac{\frac{16,6}{10,7} - \frac{13}{4,1}}{\frac{13}{4,1}}\dfrac{16,6 \times 4,1 - 13 \times 10,7}{13 \times 10,7} \times 100 = \dfrac{-71,04}{139,1} \times 100 \approx -51,07\,\%$.

2. Le nombre de cotisants sera : $16,6 \times 1,064$ et le nombre de retraités sera de $10,7 \times 1,121$.
   En 2010 le rapport démographique sera :
   $R_{2010} = \dfrac{16,6 \times 1,064}{10,7 \times 1,121} = \dfrac{16,6}{10,7} \times \dfrac{1,064}{1,121} = R_{2005} \times \dfrac{1,064}{1,121}$
   Le rapport de 2005 sera donc multiplié par $\dfrac{1,064}{1,121} \approx 0,949$, qui correspond à une baisse de 0,051 soit 5,1 %.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. ABCDEF est une chaîne contenant tous les sommets; il existe donc une chaîne reliant deux points quelconques. Le graphe est connexe.

2. **a.** On utilise l'a algorithme de Dijskra :

A	B	C	D	E	F	Sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	A 0
	7 A	∞	15 A	∞	∞	B 7
		19 B	15 A	11 B	23 B	E 11
		19 B	13 E		23 B	D 13
		18 D			23 B	C 18
					21 C	F 21

   Le sommet F étant choisi on remonte la chaîne en passant par tous les prédécesseurs.
   Le chemin le plus court est donc $A \to B \to E \to D \to C \to F$.

   b. En suivant ce chemin il faut 21 heures.

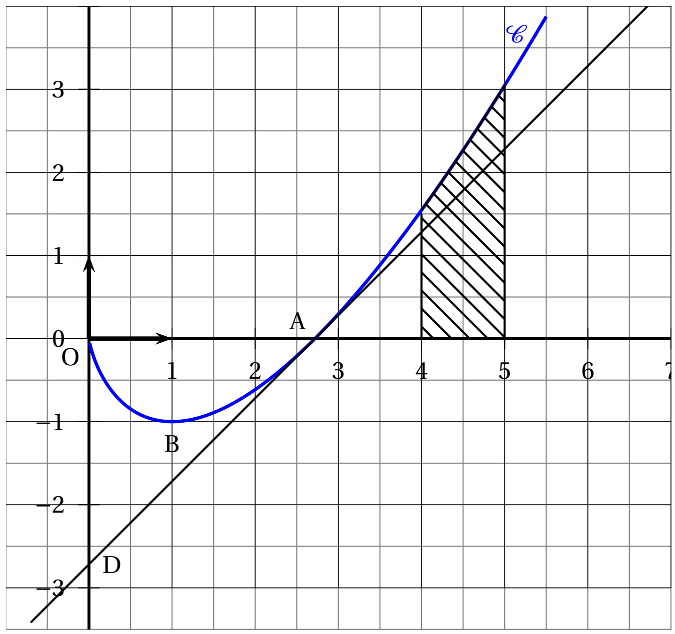
3. Le graphe contient 4 sommets de degré 3 : C, D, E, F. Il n'existe donc pas de chaîne eulérienne. Il n'existe pas de parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois. -

Exercice 3 **10 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A. Lectures graphiques



1. La droite a pour coefficient directeur : $\dfrac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \dfrac{-e-0}{0-e} = 1$.
   Cette droite a pour ordonnée à l'origine $-e$, donc une équation de (AD) est $y = x - e$.

2. Par lectures graphiques :
   a. On lit $f(1) = -1$ et $f'(1) = 0$ (tangente horizontale)
   b. On a $f(x) \leqslant 0$ sur $[0 ; e]$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[e ; 5[$.
   c. $f'(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1 ; 5[$.
   d. Puisque $F'(x) = f(x)$, le signe de $f(x)$ vu ci-dessus donne les variations de F :
   Sur $]0 ; 1[$, F est décroissante et sur $]1 ; 5[$, F est croissante.
   e. On voit que $2 < \mathscr{A} < 3$.

Partie B. Étude de la fonction

1. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$, d'où par produit des limites :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   b. On a $f(x) = x\ln x - x$; on sait que :
   $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$
   $\displaystyle\lim_{x\to 0} x = 0$, d'où par somme de limites :
   $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. **a.** f est dérivable car produit de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \ln x - 1 + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$.

b. On sait que :

- $\ln x < 0$ sur $]0\,;\,1[$;
- $\ln x > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

Donc f est décroissante sur $]0\,;\,1[$ de 0 à $f(1) = 1(\ln 1 - 1) = -1$.

f est croissante sur $]1\,;\,+\infty[$ de -1 à plus l'infini.

3. a. H est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle,

$H'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2}x\ln x + \dfrac{1}{2}x^2 \times \dfrac{1}{x} - 2 \times \dfrac{1}{4}x = x\ln x + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}x = x\ln x = h(x)$.

b. On a $f(x) = x\ln x - x = h(x) - x$, une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est définie par :

$F(x) = H(x) - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{3}{4}x^2$.

c. On a vu que sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ la fonction f est négative, donc l'aire demandée est égale à l'opposée de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\mathrm{e}) - F(1)$.

L'aire demandée est donc égale à :

$F(1) - F(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{2} \times 1^2\ln 1 - \dfrac{3}{4} \times 1^2 - \left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2\ln\mathrm{e} - \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^2\right] = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^2 = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 - \dfrac{3}{4} \approx 1,097$ soit environ 1,1 au dixième près.