Corrigé du baccalauréat E.S. Centres étrangers 11 juin 2018

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1.

A. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}$

B. $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^2$

C. $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$

D. $f'(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

Solution : explication donnée à titre indicatif

$f = \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^2 \Longrightarrow f' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -3x \Longrightarrow u'(x) = -3$

e^2 est une constante donc sa dérivée est nulle

2.

A. 10,5 %

B. 68,8 %

C. 39,3 %

D. 20,8 %

Solution : explication donnée à titre indicatif

Le coefficient multiplicateur global est $C = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$

Soit c le coefficient multiplicateur annuel moyen sur ces 7 années alors $c^7 = C$.

Donc $c = C^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}208$

$1{,}208 = 1 + \dfrac{20{,}8}{100}$ donc le taux d'évolution annuel moyen est une hausse d'environ 20,8 %

3.

A. 0,58

B. 0,42

C. 0,54

D. 0,63

Solution : explication donnée à titre indicatif

$P(X \geqslant 12{,}5) \approx 0{,}58$ d'après la calculatrice

4.

A. 0,97

B. 0,75

C. 0,5

D. $\dfrac{1}{4}$

Solution : explication donnée à titre indicatif

$P(X \leqslant 15{,}5) = P(14 \leqslant X \leqslant 15{,}5) = \dfrac{15{,}5 - 14}{16 - 14} = 0{,}75$

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. **Solution :**

Au soir du premier jour, la masse d'algues est de $2\,000 + 0{,}02 \times 2\,000 = 2\,040$ kg.

Le matin du second jour, après la filtration, il reste $2\,040 - 100 = 1\,940$ kg.

Au soir du second jour, la masse d'algues est de $1\,940 + 0{,}02 \times 1\,940 = 1\,978{,}8$ kg.

Le matin du troisième jour, après la filtration, il reste $1\,978{,}8 - 100 = 1\,878{,}8$ kg.

On a donc bien $a_2 = 1\,878{,}8$.

2. **a.** **Solution :**

Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2 % est 1,02 donc à la fin de chaque journée, la masse d'algues présente après la filtration précédente est multipliée par 1,02. La nuit, la masse d'algues diminue de 100 kg à l'aide de la filtration.

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1{,}02a_n - 100$

b. **Solution :**

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} &= a_{n+1} - 5000\\ &= 1{,}02a_n - 100 - 5000\\ &= 1{,}02a_n - 5100\\ &= 1{,}02\,(a_n - 5000)\\ &= 1{,}02b_n\end{aligned}$$

(b_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme

$b_0 = a_0 - 5000 = -3000$

c. **Solution :**

$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 \times q^n = -3000 \times 1{,}02^n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n + 5000 = 5000 - 3000 \times 1{,}02^n$

d. **Solution :**

$|1{,}02| > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}02^n = +\infty$ et par opération sur les limites,

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

D'après les définitions des limites cela signifie qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

On en déduit donc que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n < 0$.

Les algues finissent donc bien par disparaà®tre.

3. **a.** **Solution :**

```
N ← 0
A ← 2000
Tant que A ⩾ 0
    A ← 1,02 × A − 100
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

b. **Solution :**

L'algorithme renvoie la valeur $N = 26$ car $a_{25} \approx 78$ et $a_{26} \approx -20$

4. **a.** **Solution :**

$$\begin{aligned}&5000 - 3000 \times 1{,}02^n \leqslant 0\\ \iff\ &3000 \times 1{,}02^n \geqslant 5000\\ \iff\ &1{,}02^n \geqslant \frac{5}{3}\end{aligned}$$

$\iff \ln\left(1{,}02^n\right) \geqslant \ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ car $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$\iff n\ln(1{,}02) \geqslant \ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}02)}$ car $\ln(1{,}02) > 0$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}02)} \approx 25{,}8$

Donc sur $\mathbb{N}$, $5\,000 - 3\,000 \times 1{,}02^n \leqslant 0 \iff n \geqslant 26$

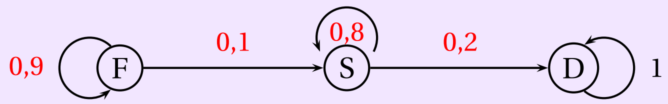
b. **Solution :**

On retrouve le fait que les algues ont disparues après 26 filtrations donc au matin du 27[e] jour.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** **Solution :**



b. **Solution :**

Le nombre 1 signifie que la probabilité pour un automate défaillant de le rester est de 1. Il s'agit donc de l'évènement certain.

c. **Solution :**

0,2 est la probabilité pour un automate en sursis de devenir défaillant.

2. **a.** **Solution :**

$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0\end{pmatrix}$

b. **Solution :** On cherche P_3

$P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix}0{,}729 & 0{,}217 & 0{,}054\end{pmatrix}$

c. **Solution :**

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Donc $P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est bien l'état stable du graphe.

On en déduit qu'avec le temps tous les automates seront défaillants.

3. **a.** **Solution :** $P_n = \begin{pmatrix} f_n & s_n & d_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} &= \begin{pmatrix} f_{n+1} & s_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}\\ &= P_n \times M\\ &= \begin{pmatrix} f_n & s_n & d_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0{,}9f_n & 0{,}1f_n + 0{,}8s_n & 0{,}2s_n + d_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 0{,}1f_n + 0{,}8s_n$

b. **Solution :**

$D \leftarrow 0$
$S \leftarrow 0$
$F \leftarrow 1$
$N \leftarrow 0$
Tant que $D < 0{,}3$
$\quad D \leftarrow 0{,}2 \times S + D$
$\quad S \leftarrow 0{,}1 \times F + 0{,}8 \times S$
$\quad F \leftarrow 0{,}9 \times F$
$\quad N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher N

c. **Solution :** Plusieurs méthodes :

— On programme l'algorithme qui affiche $N = 8$

— On calcule P_n à l'aide des matrices jusqu'à obtenir ce que l'on cherche. P_7 donne $d_7 \approx 0{,}25$ et P_8 donne $d_8 \approx 0{,}31$

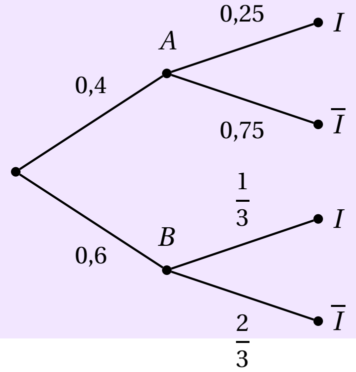
On en déduit donc que la proportion d'automates défaillants dépasse 30% à partir du 8$^{\text{ème}}$ jour.

d. **Solution :**

L'ordre est important. Si on échange les deux premières lignes par exemple, la valeur de S utilisée par l'instruction $D \leftarrow 0{,}2 \times S + D$ sera décalée d'un jour par rapport à celle souhaitée.

Exercice 3 — 5 points

1. **a.** **Solution :**



b. **Solution :**

A et B forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(I) &= P(I\cap A)+P(I\cap B)\\ &= P(A)\times P_A(I)+P(B)\times P_B(I)\\ &= 0{,}4\times 0{,}25+0{,}6\times\frac{1}{3}\\ &= 0{,}3 \end{aligned}$$

c. **Solution :** Le responsable affirme que $P_{\overline{I}}(A)=P_{\overline{I}}(B)=0{,}5$

$$P_{\overline{I}}(A)=\frac{P\left(A\cap\overline{I}\right)}{P\left(\overline{I}\right)}=\frac{P(A)\times P_A\left(\overline{I}\right)}{1-P(I)}=\frac{0{,}4\times 0{,}75}{0{,}7}=\frac{3}{7}$$

Donc le responsable a tord.

2. **Solution :** Soit X la variable aléatoire associée au prix de vente de la guirlande.

X prend les valeurs 3 et 5.

$P(X=3)=P(I)=0{,}3$ et $P(X=3)=P\left(\overline{I}\right)=0{,}7$

La loi de probabilité de X est donc donnée par le tableau

x_i	3	5	Total
$P(X=x_i)$	0,3	0,7	1

$E(X)=3\times 0{,}3+5\times 0{,}7=4{,}4$.

Donc le prix de vente moyen d'une guirlande est de 4,40 €.

3. **Solution :** On répète $n=50$ fois, de manière indépendante, une expérience n'ayant que deux issues (guirlande défectueuse ou non) dont la probabilité de « succès » est $p=0{,}02$.

Si on appelle X la variable aléatoire associée au nombre de guirlandes défectueuses alors X suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0{,}02$.

$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0{,}98^{50}\approx 0{,}636$

Donc la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse est d'environ 0,636.

4. **Solution :**

L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % s'écrit

$I=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec n la taille de l'échantillon et f la fréquence observée.

L'amplitude de cet intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

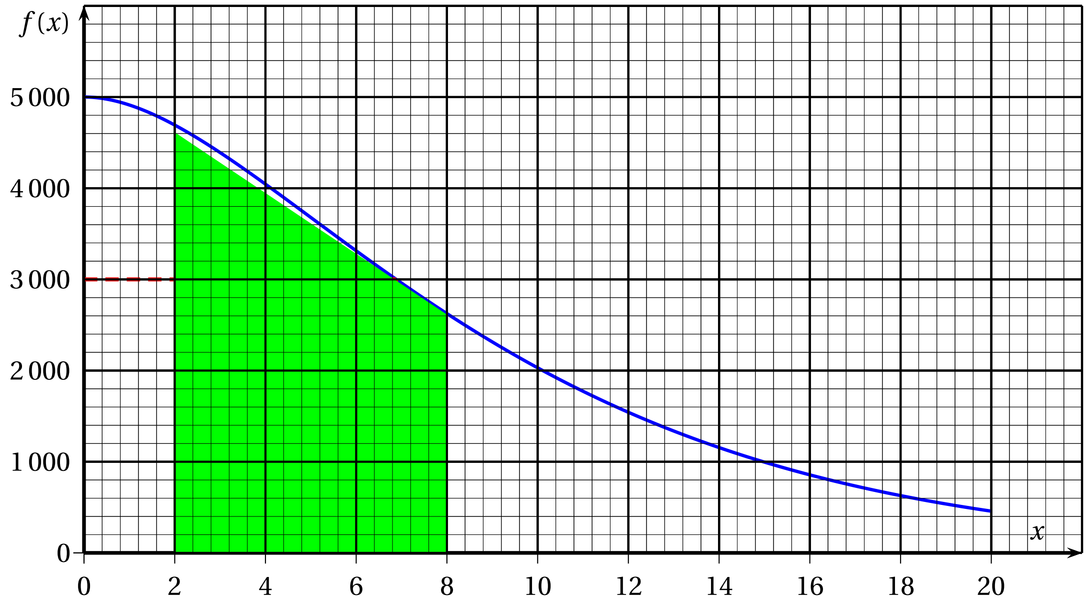
On cherche le plus petit entier naturel n tel que $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}08$.

$\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}08 \iff \sqrt{n}\geqslant 25 \iff n\geqslant 625$.

L'entreprise doit donc interroger au minimum 625 clients clients pour atteindre son objectif.

EXERCICE 4 **6 POINTS**

Partie A - Étude graphique



1. **Solution :**
   Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3000$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = 3000$.
   On trouve $x \approx 6{,}8$.

2. **Solution :** La précision demandée est évidemment impossible à atteindre : les petits carreaux du graphique représentent 80 unités d'aire !!
   On peut approcher l'aire demandée par celle d'un trapèze de bases 4 600 et 2 600 et de hauteur 6 (voir graphique).
   Ainsi l'integrale est approchée par $\dfrac{(4600 + 2600) \times 6}{2} = 21600$ unités d'aire.
   Remarque : à la calculatrice, on trouve $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 22049$.

Partie B - Étude théorique

1. **Solution :**
   f est une composée et un produit de fonctions dérivables sur [0 ; 20] donc elle est dérivable sur [0 ; 20]
   $f = u\mathrm{e}^v \implies f' = u'\mathrm{e}^v + uv'\mathrm{e}^v = (u' + uv')\mathrm{e}^v$
   Avec $\begin{cases} u(x) = 1000(x+5) \\ v(x) = -0{,}2x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1000 \\ v'(x) = -0{,}2 \end{cases}$
   $\forall x \in [0 ; 20]$, $f'(x) = (1000 - 200(x+5))\mathrm{e}^{-0{,}2x} = -200x\mathrm{e}^{-0{,}2x}$.

2. **Solution :**
   Sur [0 ; 20], $-200x \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}2x} > 0$ on en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ sur [0 ; 20].
   On en déduit le tableau suivant :

x	0		20
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	$5\,000$	$\searrow$	$f(20)$

$f(20) = 25\,000\text{e}^{-4} \approx 458$

3. **Solution :**
Sur $[0\,;\,20]$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $\left[f(20)\,;\,5\,000\right]$ or $3\,000 \in \left[f(20)\,;\,5\,000\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3\,000$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,20]$.
Par balayage $\alpha \approx 6{,}88$

4. **Solution :**

$$\begin{aligned}\int_2^8 f(x)\,\text{d}x &= F(8) - F(2)\\ &= \left(-90\,000\text{e}^{-1,6}\right) - \left(-60\,000\text{e}^{-0,4}\right)\\ &= 30\,000\text{e}^{-0,4}\left(2 - 3\text{e}^{-1,2}\right)\\ &\approx 22\,049\end{aligned}$$

Partie C - Application économique

1. **Solution :**
D'après la question 3 de la partie B on sait que $f(x) \geqslant 3\,000$ sur $[0\,;\,\alpha]$.
On en déduit que pour un prix inférieur à 6€88, la demande est supérieure à 3 000 objets.

2. **Solution :**
La valeur moyenne de f sur $[2\,;\,8]$ est $\mu = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\text{d}x$.
D'après la question 4 de la partie B on a donc $\mu = 5\,000\text{e}^{-0,4}\left(2 - 3\text{e}^{-1,2}\right) \approx 3\,675$.
On en déduit qu'en moyenne la demande est de 3 675 objets pour un prix unitaire compris entre 2 et 8 €.