Durée : 3 heures

∾ Baccalauréat ES métropole ∾
Candidats ayant repassé l'épreuve - 28 juin 2017

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 4 points

1. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 1$ alors $P(X \leqslant 2{,}5)$ a pour valeur approchée arrondie au centième :

a. 0,16 **b.** 0,26 **c.** $\boxed{0{,}31}$ **d.** 0,54

On obtient le résultat à la calculatrice.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type σ.
Si $P(-5 \leqslant Y \leqslant 5) \approx 0{,}95$ alors, parmi les réponses suivantes, la meilleure valeur approchée de σ est :

a. 5 **b.** $\boxed{2{,}5}$ **c.** 1,3 **d.** 0,95

On sait que si Y suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors $P(\mu-2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$ donc $2\sigma \approx 5$ et donc $\sigma \approx 2{,}5$.

3. Un institut de sondage réalise une enquête afin de mesurer le degré de satisfaction du service après-vente d'une société. Une première étude portant sur un échantillon aléatoire de 500 clients révèle que l'on dénombre 438 clients satisfaits. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant d'estimer la proportion de clients satisfaits est :

a. [0,079 ; 0,169] **b.** [0,455 ; 0,545] **c.** $\boxed{[0{,}831 ; 0{,}921]}$ **d.** [0,874 ; 0,878]

$f = \dfrac{438}{500} = 0{,}876$ et $n = 500$; $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] \approx [0{,}831\ ;\ 0{,}921]$

4. Cet institut souhaite réduire l'amplitude de l'intervalle de confiance. Combien de personnes au minimum faut-il interroger pour que cet intervalle de confiance ait une amplitude d'au plus 0,05 ?

a. $\boxed{1\,600}$ **b.** 40 **c.** 2 000 **d.** 400

L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$; on doit donc avoir :

$$\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}05 \iff \dfrac{2}{0{,}05} \leqslant \sqrt{n} \iff 40 \leqslant \sqrt{n} \iff n \geqslant 1\,600$$

Exercice 2 Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

En 2016, un institut de sondage mène une enquête régionale sur la manière dont les particuliers paient leur assurance. Les assurés se répartissent en deux catégories distinctes :

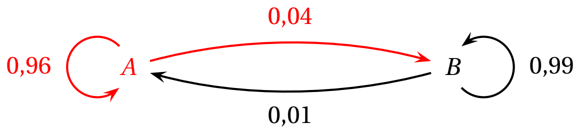
- la catégorie A, composée des assurés qui paient en agence ;
- la catégorie B, composée des assurés qui paient en ligne.

En 2016, 92 % des assurés paient en agence. On admet que, d'une année à l'autre, 4 % des assurés de la catégorie A passent à la catégorie B et que 1 % des assurés de la catégorie B passent à la catégorie A. On suppose que le nombre d'assurés est constant et que chaque année un assuré fait partie d'une seule catégorie.

Pour tout entier naturel n, on considère l'année $(2016 + n)$ et on note :

- a_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie A cette année-là,
- b_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie B cette année-là,
- P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}92 & 0{,}08 \end{pmatrix}$.

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste :



On notera A l'état « l'assuré est de catégorie A » et B l'état « l'assuré est de catégorie B ».

2. On admet que la matrice de transition M associée à cette situation est $M = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.

a. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}92 & 0{,}08 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}92 \times 0{,}96 + 0{,}08 \times 0{,}01 & 0{,}92 \times 0{,}04 + 0{,}08 \times 0{,}99 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0{,}884 & 0{,}116 \end{pmatrix}$

b. Donc la probabilité qu'un assuré soit de catégorie A en 2017 vaut environ 0,89.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état stable du graphe.

a. D'après le texte, $a + b = 1$.

De plus la matrice P vérifie :

$$P \times M = P \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0{,}96a + 0{,}01b &=& a \\ 0{,}04a + 0{,}99b &=& b \end{array} \right.$$
$$\iff -0{,}04a + 0{,}01b = 0$$

Les nombres a et b vérifient donc le système : $\left\{ \begin{array}{rcl} -0{,}04a + 0{,}01b &=& 0 \\ a + \phantom{0{,}01}b &=& 1 \end{array} \right.$.

b. $\left\{ \begin{array}{rcl} -0{,}04a + 0{,}01b &=& 0 \\ a + \phantom{0{,}01}b &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& 4a \\ a + b &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& 4a \\ a + 4a &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& 0{,}8 \\ a &=& 0{,}2 \end{array} \right.$

4. a. $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0{,}96a_n + 0{,}01b_n \\ b_{n+1} &=& 0{,}04a_n + 0{,}99b_n \end{array} \right.$

On en déduit que $a_{n+1} = 0{,}96a_n + 0{,}01b_n$; or, pour tout n, $a_n + b_n = 1$.

Donc $a_{n+1} = 0{,}96a_n + 0{,}01(1 - b_n) = 0{,}95a_n + 0{,}01$, pour tout n.

On admet que, pour tout entier naturel n, $a_n = 0{,}2 + 0{,}72 \times 0{,}95^n$ et que la suite (a_n) est décroissante.

b. On souhaite déterminer au bout de combien d'années moins d'un assuré sur deux sera de catégorie A. On complète l'algorithme pour qu'il donne le résultat attendu :

Variables :	A est un nombre réel N est un entier naturel
Initialisation	Affecter à A la valeur 0,92 Affecter à N la valeur 0
Traitement	Tant que $A \geqslant 0,5$ Affecter à N la valeur $N+1$ Affecter à A la valeur $0,95A+0,01$ Fin Tant que
Sortie	Afficher N

c. On veut savoir si la proportion d'assurés de catégorie A va devenir inférieure à 0,5.
On résout donc l'inéquation $a_n < 0,5$:

$$a_n < 0,5 \iff 0,2+0,72\times 0,95^n < 0,5 \iff 0,95^n < \frac{0,3}{0,72} \iff \ln\left(0,95^n\right) < \ln\left(\frac{0,3}{0,72}\right)$$
$$\iff n\ln(0,95) < \ln\left(\frac{0,3}{0,72}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{0,3}{0,72}\right)}{\ln(0,95)}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{0,3}{0,72}\right)}{\ln(0,95)} \approx 17,07$ donc pour $n \geqslant 18$, la proportion d'assurés de catégorie A sera inférieure à 0,5.

Exercice 3 Commun à tous les candidats 5 points

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

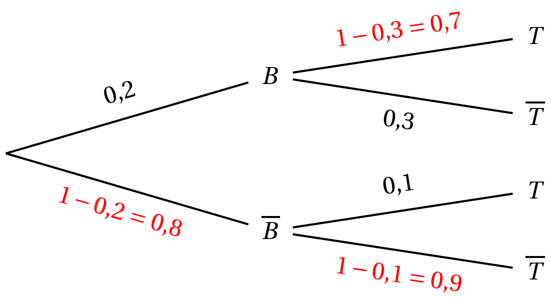
- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas;
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'évènement : « l'angine du malade est bactérienne »;
- T l'évènement : « le test effectué sur le malade est positif ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, $p(E)$ désigne la probabilité de E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de E sachant que F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. On représente la situation par un arbre de probabilité :



2. **a.** L'angine du malade est bactérienne et que le test est positif correspond à $B \cap T$:
$p(B \cap T) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$
b. D'après la formule des probabilités totales :
$p(T) = p(B \cap T) + p(\overline{B} \cap T) = 0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}22$
c. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. La probabilité pour que son angine soit bactérienne est : $p_T(B) = \dfrac{p(B \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}14}{0{,}22} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64$.
3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

a. Pour un malade, il n'y a que deux possibilités : il a un test positif avec une probabilité de $p = 0{,}22$, ou il a un test négatif avec une probabilité de $1 - p = 0{,}78$.
On est dans le cas d'une répétition de 5 expériences identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui donne le nombre de malades dont le test est positif suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}22$.
b. La probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif est :
$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0{,}22^0 \times 0{,}78^5 \approx 0{,}71$.
c. L'espérance mathématique de X est $E(X) = np = 5 \times 0{,}22 = 1{,}1$.

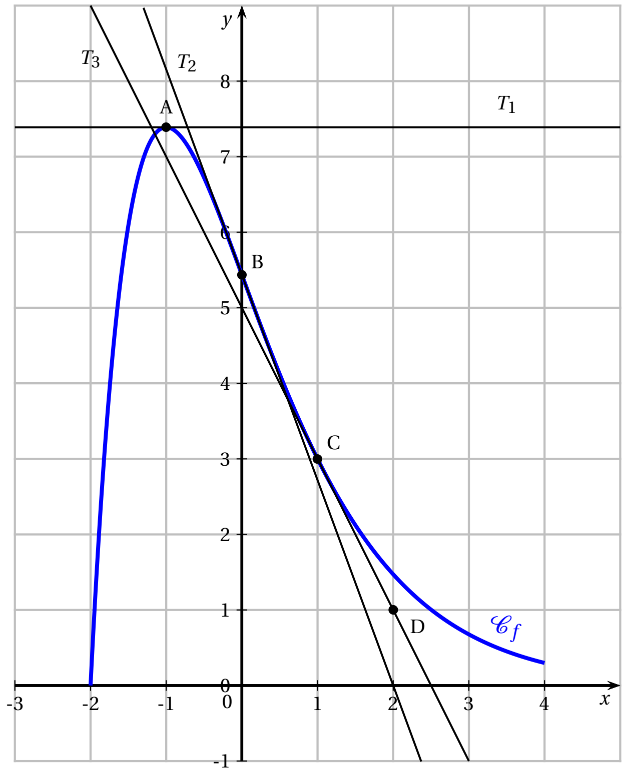
Exercice 4 Commun à tous les candidats 6 points

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ ainsi que plusieurs tangentes à $\mathscr{C}_f$:
- T_1 est la tangente au point A de coordonnées $\left(-1\,;\,\mathrm{e}^2\right)$,
- T_2 est la tangente au point B de coordonnées $(0\,;\,2\mathrm{e})$,
- T_3 est la tangente au point C de coordonnées $(1\,;\,3)$.

On sait que la tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente T_3 passe par le point D de coordonnées $(2\,;\,1)$.

1. On sait que la tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses et $\mathrm{A} \in T_1$ donc $f'(x_\mathrm{A}) = 0$ et donc $f'(-1) = 0$.
Le point de la courbe d'abscisse 1 est le point C qui appartient à la tangente T_2 donc $f'(1)$ est le coefficient directeur de T_2. La droite T_2 passe par C et D donc a pour coefficient directeur $\dfrac{y_\mathrm{D} - y_\mathrm{C}}{x_\mathrm{D} - x_\mathrm{C}} = \dfrac{1-3}{2-1} = -2$. On déduit : $f'(1) = -2$.
2. On admet que B est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
Cela veut dire qu'au point B, la courbe traverse sa tangente.
3. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$.
$f'(1) = -2$ et $f(1) = f(x_\mathrm{C}) = 3$ donc T_3 a pour équation $y = -2\,(x-1) + 3$ soit $y = -2x + 5$.



Partie B

La fonction f de la partie A est définie, pour tout réel x de $[-2;4]$, par : $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.

1. $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x+1} + (x+2) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x+1} = (1-x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1} = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x+1}$
2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-(x+1)$ qui s'annule et change de signe pour $x = -1$.
   $f(-2) = 0$; $f(-1) = \mathrm{e}^2$ et $f(4) = 6\,\mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}3$
   On établit le tableau de variations de la fonction f sur $[-2\,;\,4]$:

x	-2		-1		4
$-(x+1)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$6\,\mathrm{e}^{-3}$

PARTIE C

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver $\left[-(x+1)*\exp(-x+1)\right]$
	$x*\exp(-x+1)$
2	intégrer $\left((x+2)*\exp(-x+1)\right)$
	$-(x+3)*\exp(-x+1)$

1. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée est croissante, c'est-à-dire sur lesquels sa dérivée seconde est positive.
D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = x\,\mathrm{e}^{-x+1}$ qui est positive pour $x > 0$.
La fonction f est donc convexe sur $]0~;~4]$.

2. a. D'après le logiciel de calcul formel, la fonction f a pour primitive la fonction F définie par $F(x) = -(x+3)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.
Donc $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(-2) = \left(-4\,\mathrm{e}^{0}\right) - \left(-1\,\mathrm{e}^{3}\right) = -4 + \mathrm{e}^{3}$.

b. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[-2~;~1]$ est donc
$\displaystyle\frac{1}{1-(-2)}\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-4+\mathrm{e}^{3}}{3} \approx 5{,}362$.