

EXERCICE 1

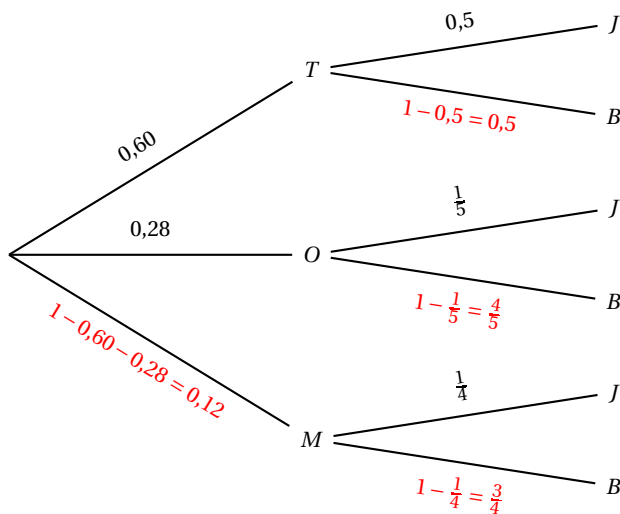
Commun à tous les candidats

6 points

À l'occasion de la fête des Mères, un fleuriste décide de proposer à ses clients plusieurs types de bouquets spéciaux.

Partie A

1. On construit un arbre pondéré représentant la situation :



2. La probabilité que le client ait acheté un bouquet de tulipes blanches est

$$P(T \cap B) = P(T) \times P_T(B) = 0,6 \times 0,5 = 0,3.$$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(T \cap B) + P(O \cap B) + P(M \cap B) = P(T) \times P_T(B) + P(O) \times P_O(B) + P(M) \times P_M(B) \\
 &= 0,6 \times 0,5 + 0,28 \times \frac{4}{5} + 0,12 \times \frac{3}{4} = 0,3 + 0,224 + 0,09 = 0,614.
 \end{aligned}$$

4. Sachant que les fleurs du bouquet acheté par ce client sont blanches, la probabilité que ce

soit un bouquet d'œillets est $P_B(O) = \frac{P(O \cap B)}{P(B)} = \frac{0,224}{0,614} \approx 0,365$.

Partie B

L'un des fournisseurs du fleuriste est un jardinier spécialisé dans la production d'une espèce de rosiers nommée « Arlequin ».

On note X la variable aléatoire qui, à chaque rosier de cette espèce pris au hasard, cultivé chez ce jardinier, associe sa hauteur exprimée en centimètres. On admet, d'après les observations et mesures réalisées, que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. On choisit au hasard un rosier « Arlequin » chez ce fournisseur.
 - a. La probabilité que ce rosier mesure entre 47 et 53 centimètres est $P(47 \leq X \leq 53) \approx 0,683$ (résultat obtenu à la calculatrice).
 - b. La probabilité que ce rosier mesure plus de 56 centimètres est $P(X > 56) \approx 0,023$ (calculatrice).
2. Le fournisseur veut prévoir quelle sera la hauteur atteinte ou dépassée par 80 % de ses rosiers « Arlequin » : on cherche donc la hauteur h telle que $P(X \geq h) = 0,8$.
 Pour des raisons de symétrie $P(X \geq h) = 0,8 \iff P(X \leq h) = 1 - 0,8 \iff P(X \leq h) = 0,2$.
 Pour $P(X \leq h) = 0,2$, on trouve à la calculatrice $h \approx 47,5$ cm.

Partie C

En se basant sur les ventes réalisées l'année précédente, ce fleuriste suppose que 85 % de ses clients viendront ce jour-là acheter un des bouquets pour la fête des Mères.

Quelques semaines avant de préparer ses commandes, il décide de vérifier son hypothèse en envoyant un questionnaire à 75 de ses clients, ces derniers étant supposés représentatifs de l'ensemble de sa clientèle.

On est donc en présence d'un échantillon de taille $n = 75$ dans lequel on suppose que la proportion p de clients qui viendront acheter un bouquet est de 0,85.

On détermine un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients qui devraient acheter un bouquet :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,85 - 1,96 \frac{\sqrt{0,85 \times 0,15}}{\sqrt{75}} ; 0,85 + 1,96 \frac{\sqrt{0,85 \times 0,15}}{\sqrt{75}} \right]$$

$$\approx [0,76 ; 0,94]$$

Les réponses reçues montrent que, parmi les 75 clients interrogés, 16 déclarent qu'ils ne lui achèteront pas de bouquet pour la fête des Mères donc 75 - 16 = 59 vont acheter un bouquet ; la fréquence observée est donc de $f = \frac{59}{75} \approx 0,79$.

$f \in I$ donc il n'y a pas de raison de rejeter l'hypothèse du fleuriste.

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 3 points

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Alors :

A. $f'(-3) = 6$ B. $f'(-3) = 4$ C. $f'(-3) = \frac{1}{4}$ D. $f'(-3) = \frac{1}{6}$

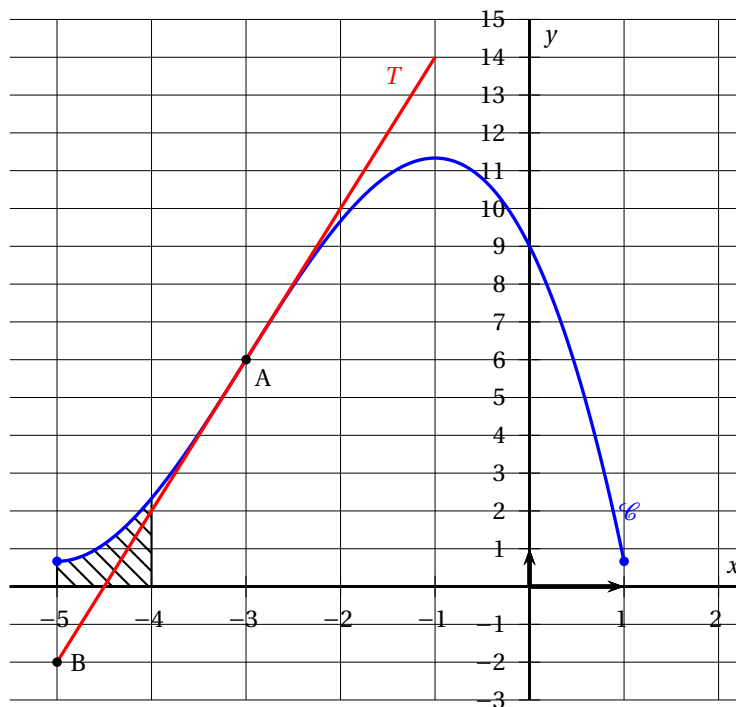
$f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point de la courbe d'abscisse

-3 donc au point A ; c'est donc la droite (AB) ; $f'(-3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 6}{-5 - (-3)} = 4$

2. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f . Alors :

A. $f''(-3) = 6$ B. $f''(-3) = 4$ C. $f''(-3) = 0$ D. $f''(-3) = \frac{1}{4}$

La courbe admet un point d'inflexion en A d'abscisse -3 donc $f''(-3) = 0$.



3. La fonction f est :

- A. convexe sur $[-5 ; -3]$ B. convexe sur $[-5 ; -1]$
 C. convexe sur $[-3 ; 1]$ D. concave sur $[-5 ; 1]$

Sur l'intervalle $[-5 ; -3]$ la courbe est au dessus de ses tangentes donc f est convexe sur cet intervalle.

4. La fonction dérivée f' est :

- A. décroissante sur $[-3 ; -1]$ B. croissante sur $[-3 ; -1]$
 C. croissante sur $[-1 ; 1]$ D. croissante sur $[-5 ; -1]$

Il suffit d'imaginer les coefficients directeurs des tangentes à la courbe pour les points dont les abscisses sont comprises entre -3 et -1 .

On pourrait même dire que la fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.

5. Toute primitive F de la fonction f est :

- A. décroissante sur $[-5 ; 1]$ B. croissante sur $[-5 ; 1]$
 C. constante sur $[-5 ; 1]$ D. décroissante sur $[-1 ; 1]$

Une primitive F de la fonction f a pour dérivée cette fonction f qui est positive sur $[-5 ; 1]$; donc la fonction F est croissante sur cet intervalle.

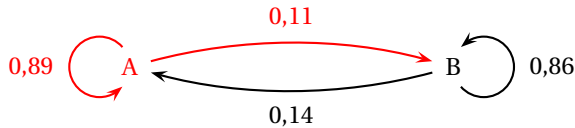
6. On note $I = \int_{-5}^{-4} f(x) dx$. Alors :

- A. $-2 \leq I \leq 0$ B. $-5 \leq I \leq -4$ C. $0 < I \leq 2$ D. $2 < I < 4$

La fonction f est positive sur $[-5 ; -4]$ donc l'intégrale I est positive et est égale à l'aire du domaine hachuré sur la figure qui, sachant que chaque carreau a une aire de 1, est inférieure à 2.

EXERCICE 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

1. a. On représente la situation décrite dans l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B :



- b. D'après le texte : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14b_n \\ b_{n+1} = 0,11a_n + 0,86b_n \end{cases}$ donc $(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \times \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$.

- c. La répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en février 2016 est :

$$P_1 = P_0 \times M = (0,8 \quad 0,2) \times \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} = (0,8 \times 0,89 + 0,2 \times 0,14 \quad 0,8 \times 0,11 + 0,2 \times 0,86) \\ = (0,74 \quad 0,26) \text{ donc } 74\% \text{ pour un livre et } 26\% \text{ pour un DVD.}$$

La répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en mars 2016 est :

$$P_2 = P_1 \times M = (0,74 \quad 0,26) \times \begin{pmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} = (0,74 \times 0,89 + 0,26 \times 0,14 \quad 0,74 \times 0,11 + 0,26 \times 0,86) \\ = (0,695 \quad 0,305) \text{ donc } 69,5\% \text{ pour un livre et } 30,5\% \text{ pour un DVD.}$$

2. a. D'après le texte, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14b_n$.

- b. D'après le contexte, pour tout n , $a_n + b_n = 1$.

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14b_n \implies a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14(1 - a_n) \iff a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14 - 0,14a_n \iff a_{n+1} = 0,75a_n + 0,14 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- c. Pour déterminer au bout de combien de mois le pourcentage de jeunes abonnés empruntant un livre deviendra pour la première fois strictement inférieur à 60 %, on décide de programmer un algorithme que l'on complète :

Initialisation

a prend la valeur 0,8

n prend la valeur 0

Traitement

Tant que $a \geq 0,6$

a prend la valeur $0,75 \times a + 0,14$

n prend la valeur $n + 1$

Fin Tant que

Sortie

Afficher n

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = a_n - 0,56$ donc $a_n = u_n + 0,56$.

- a. • $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,56 = 0,75a_n + 0,14 - 0,56 = 0,75(u_n + 0,56) - 0,42 = 0,75u_n + 0,42 - 0,42 = 0,75u_n$

- $u_0 = a_0 - 0,56 = 0,80 - 0,56 = 0,24$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $u_0 = 0,24$.

b. On en déduit que, pour tout n , $u_n = u_0 \times q^n = 0,24 \times 0,75^n$.

Comme $a_n = u_n + 0,56$, on en déduit que $a_n = 0,24 \times 0,75^n + 0,56$.

c. On résout l'inéquation $a_n < 0,6$:

$$a_n < 0,6 \iff 0,24 \times 0,75^n + 0,56 < 0,6$$

$$\iff 0,24 \times 0,75^n < 0,04$$

$$\iff 0,75^n < \frac{0,04}{0,24}$$

$$\iff \ln(0,75^n) < \ln\left(\frac{0,04}{0,24}\right) \quad \text{croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$\iff n \times \ln(0,75) < \ln\left(\frac{0,04}{0,24}\right) \quad \text{propriété de la fonction } \ln$$

$$\iff n > \frac{\ln\left(\frac{0,04}{0,24}\right)}{\ln(0,75)} \quad \text{car } \ln(0,75) < 0$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{0,04}{0,24}\right)}{\ln(0,75)} \approx 6,2$ donc $n \geq 7$.

À partir du rang $n = 7$ donc du mois d'août, le pourcentage d'abonnés qui choisissent d'emprunter un livre est inférieur à 60 %.

d. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,75; or $0 < 0,75 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

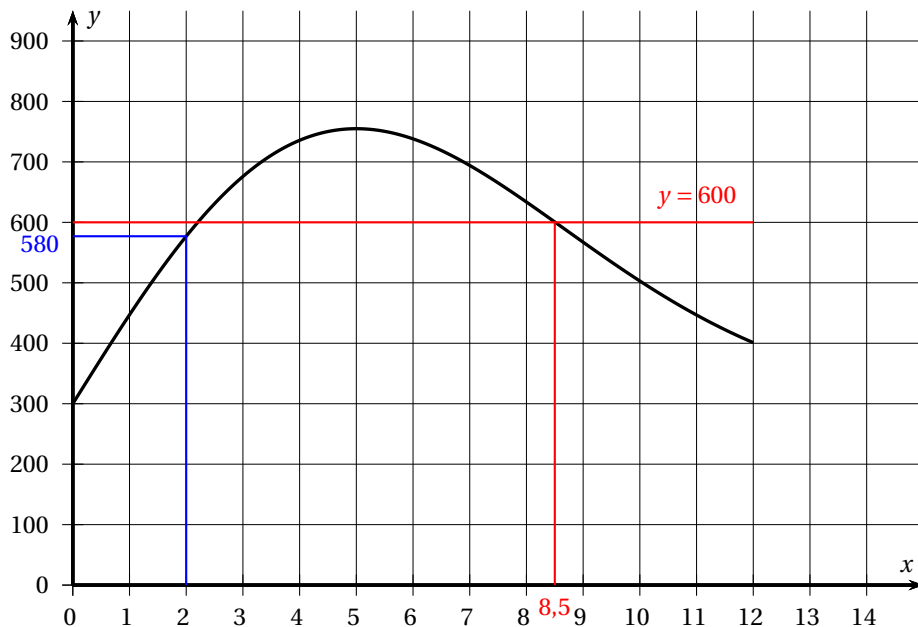
Pour tout n , $a_n = u_n + 0,56$ donc la suite (a_n) est convergente et a pour limite 0,56.

À long terme, on peut penser que la probabilité qu'un jeune abonné choisisse d'emprunter un livre sera de 56 %.

EXERCICE 4

Commun à tous les candidats

6 points



Partie A

On répond aux questions suivantes en utilisant le graphique.

- Après avoir parcouru 2 kilomètres, les randonneurs se trouvent à une altitude d'environ 580 mètres.
- Dans la partie descendante de cette randonnée, l'organisatrice a prévu de faire une pause avec les participants, dans un refuge situé à 600 mètres d'altitude.
Les randonneurs auront alors parcouru environ 8,5 kilomètres.
- À la fin du chemin de randonnée, les randonneurs seront à une altitude d'environ 400 mètres, alors qu'ils étaient partis d'une altitude de 300 mètres; ils ne reviennent donc pas à leur point de départ.

Partie B

Une modélisation du parcours proposé permet d'affirmer que la fonction f est définie sur $[0; 12]$ par :

$$f(x) = 150xe^{-0,02x^2} + 300.$$

- On admet que, pour tout x de $[0; 12]$, $f'(x) = (150 - 6x^2)e^{-0,02x^2}$.
 - On sait que, pour tout réel x , $e^{-0,02x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $150 - 6x^2$.
 - $150 - 6x^2 = 6(25 - x^2) = 6(5 - x)(5 + x)$; or $5 + x > 0$ sur $[0; 12]$ donc $f'(x)$ est du signe de $5 - x$.
 - On en déduit que :
 - $f'(x) > 0$ sur $[0; 5[$;
 - $f'(5) = 0$;
 - $f'(x) < 0$ sur $]5; 12]$.

$$f(0) = 300, f(5) = 750e^{-0,5} + 300 \approx 755 \text{ et } f(12) = 1800e^{-2,88} + 300 \approx 401$$

On construit le tableau de variations de la fonction f :

x	0	5	12
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	300	$f(5)$	$f(12)$

- L'altitude maximale atteinte au bout de 5 kilomètres par les randonneurs est $f(5)$ soit environ 755 mètres,
- On cherche x tel que $f(x) = 350$.

On complète le tableau de variations de f en arrondissant les valeurs au mètre :

x	0	α	5	12
$f(x)$	300	350	755	401

D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 350$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[0 ; 12]$ donc les randonneurs n'atteindront l'altitude de 350 mètres qu'une seule fois.

$$\left. \begin{array}{l} f(0,3) \approx 345 < 350 \\ f(0,4) \approx 360 > 350 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in]0,3 ; 0,4[\quad \left. \begin{array}{l} f(0,33) \approx 349 < 350 \\ f(0,34) \approx 351 > 350 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in]0,33 ; 0,34[$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0,334) \approx 349,99 < 350 \\ f(0,335) \approx 350,14 > 350 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in]0,334 ; 0,335[$$

L'altitude de 350 mètres est atteinte au bout d'environ 0,334 kilomètre, soit 334 mètres.

4. Soit F la fonction définie sur $[0 ; 12]$ par : $F(x) = 300x - 3750e^{-0,02x^2}$.

$$F'(x) = 300 - 3750 \times (-0,02 \times 2x) e^{-0,02x^2} = 300 + 150xe^{-0,02x^2} = f(x)$$

donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 12]$.

5. L'ascension a lieu entre le kilomètre 0 et le kilomètre 5 donc la valeur de l'altitude moyenne de la phase d'ascension de cette randonnée est :

$$\frac{1}{5-0} \int_0^5 f(x) dx = \frac{1}{5} [F(x)]_0^5 = \frac{1}{5} [F(5) - F(0)] = \frac{1}{5} [(1500 - 3750e^{-0,5}) - (-3750)]$$

$$= \frac{1}{5} (5250 - 3750e^{-0,5}) = 1050 - 750e^{-0,5} \approx 595$$

L'altitude moyenne pendant l'ascension est donc de 595 mètres.