Corrigé de l'entrée à l' école de santé Bron avril 2017

EXERCICE 1 **8 points**

QCM 1

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{-x} - x + 1$.

L'image de $\ln 2$ par la fonction f est :

A. $\dfrac{1}{2} - \ln 3$ **B.** $-1 - \ln 2$ **C.** $\boxed{\dfrac{3}{2} - \ln 2}$ **D.** $3 - \ln 2$

$f(\ln 2) = \text{e}^{-\ln 2} - \ln 2 + 1 = \left(\text{e}^{\ln 2}\right)^{-1} - \ln 2 + 1 = 2^{-1} - \ln 2 + 1 = \dfrac{1}{2} - \ln 2 + 1 = \dfrac{3}{2} - \ln 2$

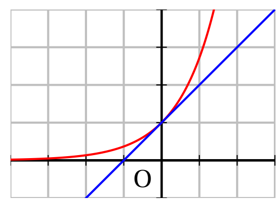
QCM 2

Sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $\text{e}^{x} - x \leqslant 1$ admet pour ensemble de solutions :

A. $\varnothing$ **B.** $\boxed{\{0\}}$ **C.** $[0\,;\,+\infty[$ **D.** $\mathbb{R}$

On peut représenter les deux fonctions $x \longmapsto \text{e}^{x}$ et $x \longmapsto x+1$ pour trouver la bonne réponse :

pour tout réel x, on a $\text{e}^{x} > x+1$ sauf pour $x = 0$ où on a l'égalité $\text{e}^{0} = 1$.



QCM 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^{-x}$.

Une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2\text{e}^{-x}$ **B.** $\boxed{F(x) = -(1+x)\text{e}^{-x}}$ **C.** $F(x) = -x\text{e}^{-x}$ **D.** $F(x) = (1-x)\text{e}^{-x}$

Si $F(x) = -(1+x)\,\text{e}^{-x}$, alors $F'(x) = -1 \times \text{e}^{-x} + (-(1+x)) \times (-1)\,\text{e}^{-x} = (-1+1+x)\,\text{e}^{-x} = x\,\text{e}^{-x} = f(x)$

QCM 4

Pour tout réel x, l'expression $A(x) = \dfrac{\text{e}^{x} + \text{e}^{-3x}}{\text{e}^{2x}} - \dfrac{1 - \text{e}^{-2x}}{\text{e}^{x}}$ est égale à :

A. $\dfrac{\text{e}^{2x}+1}{\text{e}^{3x}}$ **B.** $\text{e}^{3x}\left(\text{e}^{-2x}+1\right)$ **C.** $\boxed{\dfrac{\text{e}^{2x}+1}{\text{e}^{5x}}}$ **D.** $\text{e}^{-5x} - \text{e}^{-3x}$

$$A(x) = \dfrac{\text{e}^{x} + \text{e}^{-3x}}{\text{e}^{2x}} - \dfrac{1 - \text{e}^{-2x}}{\text{e}^{x}} = \dfrac{\text{e}^{x} + \text{e}^{-3x}}{\text{e}^{2x}} - \dfrac{\left(1 - \text{e}^{-2x}\right)\text{e}^{x}}{\text{e}^{x} \times \text{e}^{x}} = \dfrac{\text{e}^{x} + \text{e}^{-3x} - \text{e}^{x} + \text{e}^{-x}}{\text{e}^{2x}} = \dfrac{\text{e}^{-3x} + \text{e}^{-x}}{\text{e}^{2x}}$$

$$= \dfrac{\text{e}^{3x}\left(\text{e}^{-3x} + \text{e}^{-x}\right)}{\text{e}^{3x} \times \text{e}^{2x}} = \dfrac{1 + \text{e}^{2x}}{\text{e}^{5x}}$$

QCM 5

La limite $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ est égale à :

A. 0 **B.** $+\infty$ **C.** 1 $\boxed{\textbf{D. } \dfrac{1}{6}}$

$$\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \frac{x+6-3^2}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}$$

donc $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \dfrac{1}{6}$

QCM 6

La fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\ln(2x)$ est :

A. positive sur $]0\,;\,+\infty]$

B. négative sur $]0\,;\,+\infty]$

C. négative sur $]0\,;\,1]$

$\boxed{\textbf{D. } \text{positive sur } [3\,;\,+\infty[}$

On étudie le signe de $f(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(2x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)\ln(2x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

QCM 7

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\ln(2x)$.

Sa fonction dérivée est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

A. $\ln(2x) - \dfrac{x-3}{2x}$ $\boxed{\textbf{B. } \ln(2x) + \dfrac{x-3}{x}}$ **C.** $\dfrac{1}{x}$ **D.** $\dfrac{1}{2x}$

$f'(x) = 1 \times \ln(2x) + (x-3) \times \dfrac{2}{2x} = \ln(2x) + \dfrac{x-3}{x}$

QCM 8

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $f(x) = (-2x+5)^{-4}$.

Une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left]\dfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$ est la fonction F définie sur cet intervalle par :

A. $F(x) = \dfrac{1}{5}(-2x+5)^{-5}$

B. $F(x) = \dfrac{1}{10}(-2x+5)^{-5}$

C. $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{6}(-2x+5)^{-3}}$

D. $F(x) = -\dfrac{1}{3}(-2x+5)^{-3}$

Si $F(x) = -\dfrac{1}{3}(-2x+5)^{-3}$, alors $F'(x) = -\dfrac{1}{3} \times (-3) \times (-2x+5)^{-3-1} = (-2x+5)^{-4} = f(x)$.

EXERCICE 2 **5 points**

QCM 9

La documentaliste d'un collège a reçu une offre pour acheter les romans de la saga HP.

Elle enquête pour savoir si le sujet intéresse les élèves et relève que :

- 10 % des élèves ont lu le 7e épisode,
- 38 % des élèves ont vu le 7e épisode au cinéma,
- 40 % de ceux qui ne l'ont pas lu, ont vu le 7e épisode au cinéma.

La documentaliste prend au hasard une réponse parmi celles des élèves interrogés. La probabilité que l'élève soit allé voir le 7e épisode au cinéma sachant qu'il l'a lu est :

A. 0,3 | $\boxed{\textbf{B. } 0,2}$ | **C.** 0,038 | **D.** 0,04

Si on appelle L l'événement « l'élève a lu le livre », et V l'événement « l'élève a vu l'épisode », on peut dire que d'après le texte, $P(L) = 0,10$, $P(V) = 0,38$ et $P_{\overline{L}}(V) = 0,40$.

$P_{\overline{L}}(V) = 0,40$ donc $\dfrac{P\left(\overline{L} \cap V\right)}{P\left(\overline{L}\right)} = 0,40$; $P\left(\overline{L}\right) = 1 - P(L) = 1 - 0,10 = 0,90$

On déduit que $P\left(\overline{L} \cap V\right) = 0,40 \times 0,90 = 0,36$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(L \cap V) + P\left(\overline{L} \cap V\right)$

donc $P(L \cap V) = P(V) - P\left(\overline{L} \cap V\right) = 0,38 - 0,36 = 0,02$

$P_L(V) = \dfrac{P(L \cap V)}{P(L)} = \dfrac{0,02}{0,1} = 0,2$

QCM 10

Un élève se présente à deux concours C et C′ qui sont indépendants.

Il a une chance sur trois de réussir le concours C et une chance sur trois de réussir le concours C′.

En pensant augmenter ses chances de réussite, l'élève décide de passer les deux concours.

La probabilité qu'il réussisse au moins un concours est :

A. $\dfrac{2}{3}$ | **B.** $\dfrac{1}{9}$ | **C.** $\dfrac{4}{9}$ | $\boxed{\textbf{D. } \dfrac{5}{9}}$

On appelle respectivement C et C' les événements « l'élève est reçu au concours C » et « l'élève est reçu au concours C′ » ; on sait que $P(C) = \dfrac{1}{3}$ et $P(C') = \dfrac{1}{3}$.

Les événements sont indépendants donc $P(C \cap C') = P(C) \times P(C') = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$.

La probabilité que l'élève réussisse au moins un concours est :

$P(C \cup C') = P(C) + P(C') - P(C \cap C') = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{9}$

QCM 11

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0\,;\,\sigma^2\right)$. Alors on a

A. $P(-2\sigma \leqslant X \leqslant 2\sigma) \approx 0,99$

$\boxed{\textbf{B.}\ P(X \geqslant 3\sigma) \approx 0,005}$

C. $P(X \leqslant -\sigma) \approx 0,6$

D. $P(X \geqslant 2\sigma) \approx 0,0025$

> On sait que $P(-3\sigma \leqslant X \leqslant 3\sigma) \approx 0,99$ et, pour des raisons de symétrie,
> $P(X \geqslant 3\sigma) = P(X \leqslant -3\sigma) = \dfrac{1-0,99}{2} = \dfrac{0,01}{2} = 0,005$

QCM 12

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

Les points A et B ont pour affixe respective i et -1.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\text{i}| = |z+1|$ est :

A. La droite (AB)

B. Le cercle de diamètre [AB]

$\boxed{\textbf{C.}\ \text{La droite perpendiculaire à (AB) passant par O}}$

D. Le cercle de diamètre [AB] privé de A et B

> Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\text{i}| = |z+1|$.
>
> $|z-\text{i}| = |z+1| \iff \text{MA} = \text{MB}$
>
> Donc $\mathscr{E}$ est la médiatrice de [AB] donc c'est une droite perpendiculaire à (AB).
>
> Si $z = 0$, alors $|z-\text{i}| = |-\text{i}| = 1$ et $|z+1| = |1| = 1$; donc l'ensemble $\mathscr{E}$ contient le point O.

QCM 13

Sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$, l'équation $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$:

A. n'admet pas de solution

B. admet deux solutions

$\boxed{\textbf{C.}\ \text{admet trois solutions}}$

D. admet une infinité de solutions

> L'équation $2X^2 - X - 1 = 0$ admet deux solutions $X = 1$ et $X = -\dfrac{1}{2}$.
> On cherche x de $[0\,;\,2\pi[$ tel que $\sin x = 1$ et $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.
> L'équation $\sin x = 1$ admet une seule solution sur $[0\,;\,2\pi[$ qui est $x = \dfrac{\pi}{2}$.
> L'équation $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ admet deux solutions sur $[0\,;\,2\pi[$ qui sont $x = \dfrac{2\pi}{3}$ et $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

EXERCICE 3 **7 points**

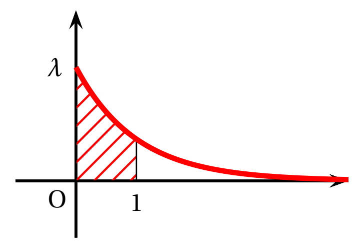
La durée d'attente, exprimée en heures, au service des urgences d'un hôpital peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.

On sait alors que pour tout réel t positif : $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est la fonction densité de la variable aléatoire T et l'on note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

PARTIE A

1. La probabilité $P(T \leqslant 1)$ est l'aire de la région du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 1$; c'est la région hachurée sur la figure ci-contre.



2. Pour $x = 0$ on a $\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda$, donc λ est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentant la fonction $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ et de l'axe des ordonnées.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $P(T \leqslant 1) = 0,92$ *et l'on admet que* $\mathrm{e}^{-2,5} = 0,08$ *à* 10^{-2} *près.*

PARTIE B

1. On sait que $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ donc
   $P(T \leqslant 1) = \displaystyle\int_0^1 \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_0^1 = -\mathrm{e}^{-\lambda} - \left(-\mathrm{e}^{0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$
   On sait aussi que $P(T \leqslant 1) = 0,92$ donc on peut dire que $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 0,92$ ou encore que $\mathrm{e}^{-\lambda} = 0,08$. Comme $\mathrm{e}^{-2,5} \approx 0,08$, on peut dire que $\lambda \approx 2,5$.

   Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 2,5$.
2. $P(1 \leqslant T \leqslant 2) = \displaystyle\int_1^2 \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_1^2 = \left(-\mathrm{e}^{-2\lambda}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)$
   $= 0,92\left(1 - 0,92\right) = 0,92 \times 0,08 \approx 0,07$
3. $P(T > 2) = 1 - \Big(P(T \leqslant 1) + P(1 \leqslant T \leqslant 2)\Big) \approx 1 - \Big(0,92 + 0,07\Big) \approx 0,01$

PARTIE C

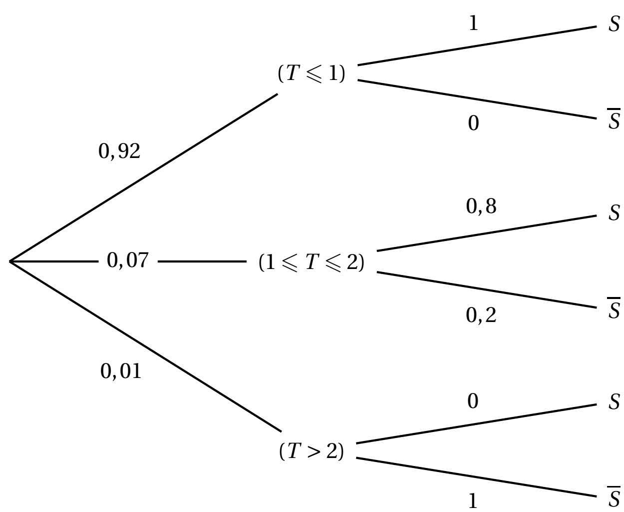
Dans cet hôpital, un questionnaire est distribué aux patients ;

- si la durée d'attente est inférieure ou égale à 1 heure, les patients cochent la case « attente satisfaisante » ;
- si la durée d'attente est comprise strictement entre 1 heure et 2 heures, alors 80 % des patients cochent la case « attente satisfaisante » et 20 % des patients cochent la case « attente non satisfaisante » ;

- si la durée d'attente est supérieure ou égale à 2 heures, les patients cochent la case « attente non satisfaisante ».

1. On prélève de façon aléatoire un questionnaire.

a. On résume les informations dans un arbre pondéré, en appelant S l'événement « l'attente est satisfaisante », et $\overline{S}$ son événement contraire, « l'attente n'est pas satisfaisante ».



D'après la formule des probabilités totales,
$P(S) = P\Big((T \leqslant 1) \cap S\Big) + P\Big((1 \leqslant T \leqslant 2) \cap S\Big) + P\Big((T \geqslant 2) \cap S\Big) = 0,92 \times 1 + 0,07 \times 0,8 + 0,01 \times 0 \approx 0,98$

b. Sachant que la case cochée est « attente satisfaisante », la probabilité qu'elle provienne d'un patient ayant attendu entre 1 heure et 2 heures est

$$P_S(1 \leqslant T \leqslant 2) = \dfrac{P\Big((1 \leqslant T \leqslant 2) \cap S\Big)}{P(S)} \approx \dfrac{0,07 \times 0,8}{0,98} \approx 0,06$$

2. On prélève de façon aléatoire deux questionnaires.

L'événement contraire de l'événement « au moins un patient a coché la case "attente non satisfaisante" » est « les deux patients ont coché la case "attente satisfaite" » dont la probabilité est

$P(S) \times P(S) = 0,92 \times 0,92 = 0,8464$.

La probabilité qu'au moins un patient ait coché la case « attente non satisfaisante » est donc $1 - 0,8464 \approx 0,15$.