Baccalauréat S Centres étrangers juin 2002

Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Pour n naturel quelconque :

$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{4}(u_n + 3v_n)\right) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)u_n + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)v_n = -\frac{1}{12}u_n + \frac{1}{12}v_n = \frac{1}{12}(v_n - u_n)$; d'où :

$w_{n+1} = \frac{1}{12}w_n$, égalité qui montre que la suite w est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$.

Le premier terme est $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11 > 0$.

On sait que quel que soit le naturel n :

$w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$; ce produit est positif car produit de deux facteurs positifs.

b. Comme $-1 < \frac{1}{12} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$, d'où par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2. **a.** Pour n naturel quelconque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}w_n > 0$.

On a vu à la question précédente que $w_n > 0$, donc u_n produit de deux facteurs positifs est lui aussi supérieur à zéro.

Finalement $u_{n+1} - u_n > 0$, signifie que la suite u est croissante.

b. De même $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}v_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}w_n < 0$, car produit d'un facteur négatif par un facteur positif.

$v_{n+1} - v_n < 0$, signifie que la suite v est décroissante.

c. La suite u croissante est minorée par $u_0 = 1$ et la suite v décroissante est majorée par $v_0 = 12$.

D'autre part $w_n > 0 \iff v_n - u_n > 0 \iff v_n > u_n \iff u_n < v_n$, donc finalement quel que soit le naturel n :

$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

3. Soit ℓ la limite de u et ℓ' la limite de la suite v.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et enfin $\ell - \ell' = 0 \iff \ell = \ell'$.

Les deux suites sont respectivement croissante et décroissante, ont la même limite et leur différence a pour limite zéro : elles sont adjacentes.

4. **a.** On sait que $t_n = 3u_n + 8v_n$.

Pour tout entier naturel n : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = t_n$: la suite t est donc constante et $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 + 96 = 99$.

Conclusion $t_n = 99$ quel quel soit le naturel n.

b. En prenant les limites égales à l'infini, on obtient :

$3\ell + 8\ell = 99 \iff 11\ell = 99 \iff \ell = 9$.

Les deus suites ont pour limite 9.

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $z_K = \dfrac{1+i}{2}$.

   b. On a $2zz' = i\left(z+z'\right) \iff 2zz' = iz+iz' \iff z'(2z-i) = iz \iff z' = \dfrac{iz}{2z-i}$, pour $z \neq \dfrac{i}{2}$.

   Donc $z_{I'} = \dfrac{i}{2-i} = \dfrac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{i(2+i)}{4+1} = \dfrac{-1+2i}{5}$.

   $z_{J'} = \dfrac{ii}{2i-i} = \dfrac{-1}{i} = i = z_J$.

   $z_{K'} = \dfrac{i\frac{1+i}{2}}{1+i-i} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

   c. K est le milieu de [IJ] et K′ n'est pas le milieu de [I′J′] : $\mathscr{T}$ ne conserve pas les milieux.

2. On a $z' = z \iff 2zz = i(z+z) \iff 2z^2 = 2zi \iff$
   $2z(z-i) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2z & = & 0 \\ z-i & = & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ z & = & i \end{array}\right.$
   L'origine O et le point J sont les seuls points invariants par $\mathscr{T}$.

3. Pour $z \neq \dfrac{i}{2}$, $\left(z' - \dfrac{i}{2}\right)\left(z - \dfrac{i}{2}\right) + \dfrac{1}{4} = zz' - \dfrac{i}{2}\left(z+z'\right) = \dfrac{1}{2}\left[2zz' - i\left(z+z'\right)\right]$.
   Mais par définition $2zz' - i\left(z+z'\right) = 0$ si et seulement si z' est l'affixe de M' image par $\mathscr{T}$ du point M d'affixe z.
   Donc $M' = \mathscr{T}(M) \iff \left(z' - \dfrac{i}{2}\right)\left(z - \dfrac{i}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

4. $M(z) \in \mathscr{C} \iff AM = 1 \iff \left|z - \dfrac{i}{2}\right| = 1$.
   D'après la question précédente en prenant le module de chaque membre d' l'égalité trouvée :
   $\left|z - \dfrac{i}{2}\right| \times \left|z' - \dfrac{i}{2}\right| = \left|-\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$.
   Donc pour un point M de $\mathscr{C}$, on a $1 \times \left|z' - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{4}$.
   Cette égalité signifie que le point M' d'affixe z' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et de rayon $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. L'équation s'écrit $x^2 + y^2 = 4$. Comme $0 < x^2 < 4 \Rightarrow 0 < x < 2$ et de même $0 < y^2 < 4 \Rightarrow 0 < y < 2$, le seul couple à essayer est (1 ; 1) qui n'est pas solution.
   • On peut aussi écrire : $x^2 + y^2 = 4 \iff x^2 = 4 - y^2 \iff x^2 = (2+y)(2-y)$: la seule possibilité d'avoir un carré est que $2 + y = 2 - y \iff 2y = 0$ ce qui n'est pas possible.

2. **a.** On a donc $x^2 + y^2 = p^2$.
   • Si x et y sont pairs leurs carrés sont pairs et la somme $x^2 + y^2$ aussi : ce n'est pas possible puisque l'on a vu que p est premier supérieur à 2, donc impair, donc son carré est aussi impair;
   • Si x et y sont impairs leurs carrés sont impairs et la somme $x^2 + y^2$ est paire : même impossibilité puisque p^2 est impair.
   Donc x et y sont de parités différentes.

b. x et y sont non nuls donc $x^2+y^2=p^2 \Rightarrow 0<x^2<p^2 \Rightarrow 0<x<p$: x ne peut donc diviser p qui est premier. Même raisonnement pour y.

c. Supposons qu'il existe un diviseur d commun à x et à y. Il existe donc deux naturels k et k' tels que $x=kd$ et $y=k'd$.
On a donc $k^2d^2+k'^2d^2=p^2 \iff d^2\left(k^2k'^2\right)=p^2$.
Ceci signifie que d^2 divise p^2. p étant premier les seuls diviseurs de p^2 sont 1, p et p^2 ;
- si $d^2=p^2$, alors $d=p$, alors x et y sont des multiples de p ce qui n'est pas possible d'après la question précédente ;
- si $d^2=p$, p aurait trois diviseurs 1, p et p^2, ce qui n'est pas possible puisque p est premier ;
- il reste donc $d=1$, ce qui signifie que x et y sont premiers entre eux.

3. a. On a $x^2+y^2=\left|u^2-v^2\right|^2+(2uv)^2=u^4-2u^2v^2+v^4+4u^2v^2=$
$u^4+v^4+2u^2v^2=\left(u^2+v^2\right)^2=p$.
Ceci montre que le couple $\left(\left|u^2-v^2\right|\ ;\ 2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.

b. • Si $p=5=1+4=1^2+2^2$, on peut prendre $u=1$ et $v=2$.
Le couple solution est donc $\left(\left|1^2-2^2\right|\ ;\ 2\times1\times2\right)=(3\ ;\ 4)$.
On retrouve le triplet pythagoricien $(3;4;5)$: $3^2+4^2=5^2$.
• Si $p=13=4+9=2^2+3^2$, on peut prendre $u=2$, $v=3$.
Le couple solution est donc $\left(\left|2^2-3^2\right|\ ;\ 2\times2\times3\right)=(5\ ;\ 12)$.
$5^2+12^2=25+144=169=13^2$.

4. a. • $p=3=1+2=2+1$, donc p n'est pas la somme de deux carrés.
• $p=7=1+6=4+3$,donc p n'est pas la somme de deux carrés.

b. • $x^2+y^2=9$; on a donc $x^2<9$ et $y^2<9$ ou encore $x<3$ et $y<3$.
On a vu que x et y sont de parités différentes on ne peut avoir que $(1;2)$ ou $(2;1)$ comme candidats : ils ne sont pas solutions car $1+4=5\neq9$;
• $x^2+y^2=49$; on a donc $x^2<49$ et $y^2<49$ ou encore $x<7$ et $y<7$.
Compte tenu de la parité différente de x et de y les couples solutions peuvent être :
$(1;2)$, $(1;4)$, $(1;6)$, $(2;1)$, $(2;3)$, $(2;5)$, $(3;2)$, $(3;4)$, $(3;6)$, $(4;1)$, $(4;3)$, $(4;5)$, $(5;2)$, $(5;4)$, $(5;6)$, $(6;1)$, $(6;3)$, $(6;5)$.
Aucun de ces couples n'est solution, donc l'équation $x^2+y^2=49$ n'a pas de solution.

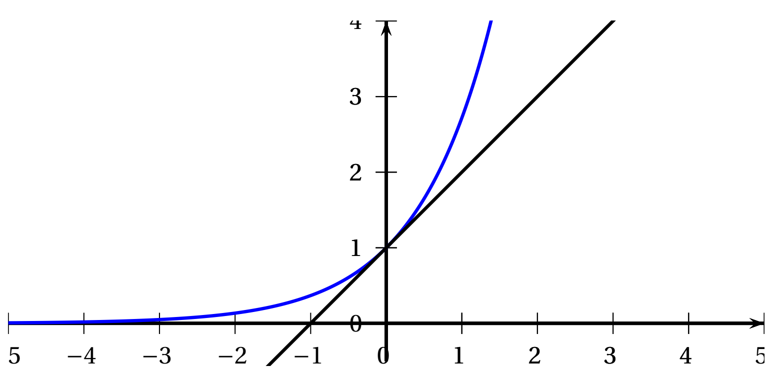
PROBLÈME **11 points**

$$f_n(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+n\ln x,$$

Partie A : Étude du cas particulier $n=0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

1.



2. Résolution graphique d'une inéquation :

a. Avec $f(x) = \mathrm{e}^x$, $\;f(0) = 1$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$ et $f'(0) = 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$, soit $y - 1 = x$ ou $y = x+1$.

On voit sur la figure que quel que soit le réel u, la courbe est au dessus de la tangente soit :

$\mathrm{e}^u \geqslant u+1$.

b. En posant pour tout réel u, $\;x = -u$, l'inégalité précédente s'écrit :

$\mathrm{e}^{-x} \geqslant -x+1 \iff \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \geqslant 0$.

En multipliant chaque membre de l'inégalité précédente par e^x, on obtient :

$1 + (x-1)\mathrm{e}^x \geqslant 0$.

3. Limites :

a. On a $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - \dfrac{1}{x}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$.

b. Avec la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$, on a par définition $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} =$ $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

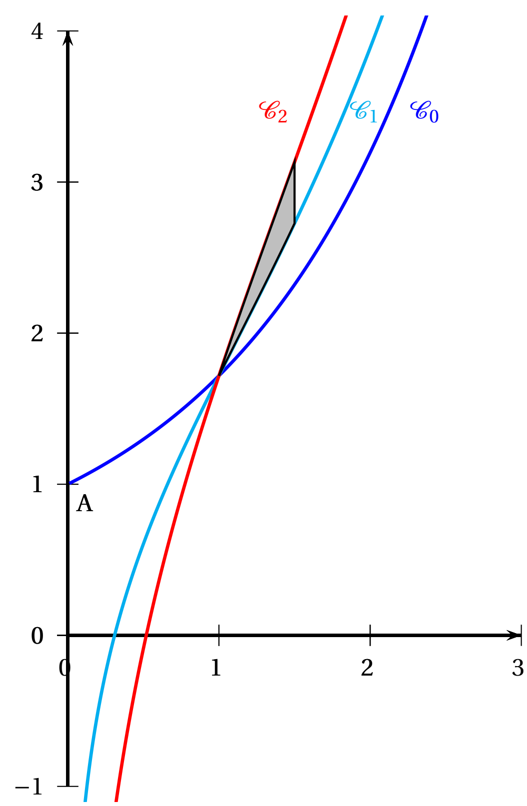
4. Sens de variations :

a. La fonction f_0 quotients de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur étant non nul est dérivable et sur cet intervalle :

$f_0'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x - 1)}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)+1}{x^2}$.

b. On a vu à la fin de la question précédente que $1 + (x-1)\mathrm{e}^x \geqslant 0$, donc $f_0'(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$. La fonction f_0 est croissante de 1 à plus l'infini.

5.



Partie B : Étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

1. La fonction $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + n\ln x$ somme de quotient de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f_n'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x - 1)}{x^2} + \dfrac{n}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)+1+nx}{x^2}$.
Or on a vu que $\mathrm{e}^x(x-1)+1 \geqslant 0$, donc comme $nx > 0$, $\mathrm{e}^x(x-1)+1+nx > 0$: donc $f_n'(x) > 0$: les fonctions f_n sont croissantes sur $]0~;~+\infty[$.

2. • On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} n\ln x = +\infty$, d'où par somme de limites :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
• On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$ et on a $\displaystyle\lim_{x\to0} n\ln x = -\infty$, d'où par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to0} f_n(x) = -\infty$.
Le dernier résultat montre que géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}_n$ au voisinage de zéro.

3. Soit $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} + (n+1)\ln x - \left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} + n\ln x\right) = \ln x$.
Or on sait que la fonction ln est négative entre 0 et 1, s'annule en 1 et est positive sur $[1~;~+\infty[$. Donc :
   - Sur $]0~;~1[$ $\mathscr{C}_{n+1}$ est au dessous de $\mathscr{C}_n$;
   - Sur $]1~;~+\infty[$ $\mathscr{C}_{n+1}$ est au dessus de $\mathscr{C}_n$;
   - Toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ contiennent le point de coordonnées $(1~;~\mathrm{e}-1)$.

4. On a vu à la question précédente que $d_n(x) = n\ln x$, donc $d_n(1) = 0$: toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ contiennent donc le point $\mathrm{B}(1~;~\mathrm{e}-1)$.

5. **a.** On a $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} + \ln x$.
On a vu que les fonctions f_n sont strictement croissantes de moins l'infini à plus l'infini; comme elles sont continues car dérivables sur $]0~;~+\infty[$, il existe donc un réel unique $\alpha_1 \in]0~;~+\infty[$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
On a $f_1(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$, donc $\alpha_1 \in]0~;~1[$;
$f(0,2) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2}-1}{0,2} + \ln 0,2 \approx -0,502$ et
$f(0,9) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,9}-1}{0,9} + \ln 0,9 \approx 7,2$, donc $\alpha_1 \in]0,2~;~0,9[$.
b. On a vu à la question 3 que sur $[0;1[$, $\mathscr{C}_{n+1}$ est au dessous de $\mathscr{C}_n$, donc en particulier que $\mathscr{C}_2$ est au dessous de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_3$ est au dessous de $\mathscr{C}_2$, ... et donc que pour $n > 1$, $\mathscr{C}_n$ est au dessous de $\mathscr{C}_1$, donc en particulier que pour tout $n > 1$, $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1)$.
Or $f_1(\alpha_1) = 0$, donc $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout $n > 1$.
c. Quel que soit $n > 1$, on vient de voir que $f_n(\alpha_1) < 0$ et on sait que $f_n(1) > 0$; la fonction f_n étant continue car dérivable s'annule donc pour une unique valeur α_n de $]\alpha_1~;~1[$.

6. **a.** On a vu dans la partie A que la fonction f_0 est strictement croissante en particulier sur l'intervalle $[0;1[$, donc
$0 < x < 1 \Rightarrow 1 < \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} < \mathrm{e}-1$.
b. Par définition α_n annule la fonction f_n, soit :
$\dfrac{\mathrm{e}_n^{\alpha}-1}{\alpha_n} + n\ln\alpha_n = 0$.

On a vu au 6. a que si $x \in]0~;~1]$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} < \mathrm{e}-1$donc en particulier pour α_n, $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} < \mathrm{e}-1 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} + n\ln\alpha_n < \mathrm{e}-1+n\ln\alpha_n$ ou encore $0 < \mathrm{e}-1+n\ln\alpha_n \iff n\ln\alpha_n > 1-\mathrm{e} \iff \ln\alpha_n > \dfrac{1-\mathrm{e}}{n}$.

La fonction exponentielle étant croissante, on a :

$\ln\alpha_n > \dfrac{1-\mathrm{e}}{n} \Rightarrow \mathrm{e}^{\ln\alpha_n} > \mathrm{e}^{\frac{1-\mathrm{e}}{n}}$ ou encore $\alpha_n > \mathrm{e}^{\frac{1-\mathrm{e}}{n}}$.

c. On a donc $\mathrm{e}^{\frac{1-\mathrm{e}}{n}} < \alpha_n < 1$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1-\mathrm{e}}{n}} = 1$, donc d'après le théorème des « gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

7. Voir ci-dessus.

Partie C : Étude d'une suite d'intégrales

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On a vu que sur $[1~;~+\infty[$, $f_n(x) \geqslant 0$, donc I_n est l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites verticales d'équation $x=1$ et $x=\frac{3}{2}$.

2. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et par linéarité de l'intégrale :

$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \left[f_{n+1}(x) - f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

Or on a vu que pour $x \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$, d'où $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$, donc $I_{n+1} - I_n$ est l'intégrale d'une fonction positive ; sur l'intervalle $\left[1~;~\frac{3}{2}\right]$, cette intégrale est positive et par conséquent la suite (I_n) est croissante.

3. D'après la question précédente l'aire comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=\dfrac{3}{2}$ est, en unité d'aire, l'intégrale

$\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \left[f_{n+1}(x) - f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

L'unité d'aire est égale à $2\times 2 = 4~\text{cm}^2$, donc l'aire cherchée est égale à $4\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \ln x\,\mathrm{d}x$ aire indépendante de n et donc constante.

Rem. On trouve par une intégration par parties qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln x$ est la fonction $x \longmapsto x\ln x - x$.

L'aire cherchée est donc :

$\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} 4\ln x\,\mathrm{d}x = 4\left[x\ln x - x\right]_1^{\frac{3}{2}} = 4\left[\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{2} - (1\ln 1 - 1)\right] = 4\left[\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right] =$ $6\ln\frac{3}{2} - 2 \approx 0,433~\text{cm}^2$.

On a obombré cette surface dans la figure au dessus, aire entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.