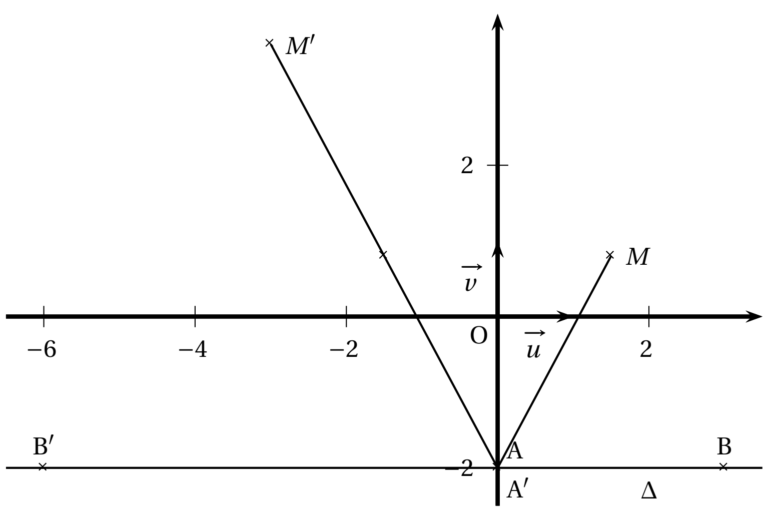
Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2004 ∾

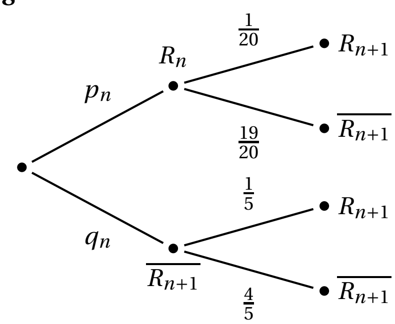
EXERCICE 1 **4 points**

1. $a' = -2a+2\mathrm{i} = -2(-2\mathrm{i})+2\mathrm{i} = -2\mathrm{i} = a$ et $b' = -2(3-2\mathrm{i})+2\mathrm{i} = -6-4\mathrm{i}+2\mathrm{i} = -6-2\mathrm{i}$.
2. On suppose que $M \in \Delta$. Alors M a pour affixe $z = x-2\mathrm{i}$ avec x réel.
M' a pour affixe $z' = -2(x-2\mathrm{i})+2\mathrm{i} = -2x-4\mathrm{i}+2\mathrm{i} = -2x-2\mathrm{i}$ donc $M' \in \Delta$.
3. $\left|z'+2\mathrm{i}\right| = |-2z+4\mathrm{i}| = |-2\times(z-2\mathrm{i})| = |-2|\times|z+2\mathrm{i}| = 2\text{Ö}|z+2\mathrm{i}|$.
Interprétation géométrique : $\mathrm{A}M' = 2\mathrm{A}M$
4. On suppose que $M \neq \mathrm{A}$. Donc $z \neq ?2\mathrm{i}$.
   a. On sait que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) = \arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}}\right) = \arg(z-a) = \arg(z+2i) = \theta$ modulo 2π.
   b. $(z+2\mathrm{i})\left(z'+2\mathrm{i}\right) = (z+2\mathrm{i})(2z+4\mathrm{i}) = -2(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i}) = -2(z+2\mathrm{i})(\overline{z+2\mathrm{i}}) = -2|z+2\mathrm{i}|^2$.
   Or $z+2\mathrm{i} \neq 0$. D'où $|z+2\mathrm{i}|^2 > 0$ et $(z+2\mathrm{i})(z'+2\mathrm{i})$ est un réel strictement négatif.
   c. On en déduit que $\arg(z+2\mathrm{i})(z'+2\mathrm{i}) = \pi\ [2\pi]$. Donc
   $\arg(z+2\mathrm{i})+\arg\left(z'+2\mathrm{i}\right) = \pi\ \ [2\pi]$.
   Puis $\arg(z'+2\mathrm{i}) = \pi-\theta\ \ [2\pi]$.
   d. Nous avons $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right) = \arg(z'+2\mathrm{i}) = \pi-\theta = \pi-\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)$, toutes ces égalités étant modulo 2π
   Par conséquent les demi-droites [AM) et [AM') sont symétriques par rapport à l'axe $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.
5. Étant donné un point M distinct de A, on sait que $\mathrm{A}M' = 2\mathrm{A}M$. Donc M' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $2\mathrm{A}M$. De plus le point M' appartient à la demi-droite image de [AM) par la réflexion d'axe $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. Comme cette demi-droite a pour origine le point A, elle coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un seul point M'.



EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire



1. **a.** L'énoncé dit que $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{5}$ et $p_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{20}$.
Sur l'arbre pondéré on place ces deux probabilités.

   b. Par définition :
$p(R_n \cap R_{n+1}) = p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) = \dfrac{1}{20} p_n$.
De même :
$\text{p}\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) = p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times p\left(\overline{R_n}\right) = \dfrac{1}{5} q_n$.

   c. La loi des probabilités totales permet d'écrire que :
$p(R_{n+1}) = p(R_n \cap R_{n+1}) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right)$ soit :
$$p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} q_n.$$

   d. Comme $p_n + q_n = 1$, l'égalité précédente peut s'écrire :
$p_{n+1} = \dfrac{1}{20} p_n + \dfrac{1}{5}\left(1 - p_n\right) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20} p_n$.

2. **a.** Quel que soit l'entier n, $v_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{4}{23} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20} p_n - \dfrac{4}{23} = \dfrac{23-20}{5 \times 23} - \dfrac{3}{20} p_n = \dfrac{3}{115} - \dfrac{3}{20} p_n = -\dfrac{3}{20}\left(p_n - \dfrac{4}{23}\right) = -\dfrac{3}{20} p_n$.
Cette égalité montre que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$.
Son premier terme est $v_1 = p_1 - \dfrac{4}{23} = -\dfrac{4}{23}$.

   b. Donc pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \left(-\dfrac{3}{20}\right)^{n-1} \times \left(-\dfrac{4}{23}\right) = -\dfrac{4}{23}\left(-\dfrac{3}{20}\right)^{n-1}$.
On en déduit que $p_n = v_n + \dfrac{4}{23} = -\dfrac{4}{23}\left(-\dfrac{3}{20}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{23}$.

   c. On a $-1 < -\dfrac{3}{20} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{3}{20}\right)^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{4}{23} \times \left(-\dfrac{3}{20}\right)^{n-1} = 0$.
Finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{4}{23}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

1. N_2 est premier. N_3 n'est pas premier car divisible par 3. N_4 n'est pas premier car $1\,111 = 11 \times 101$.

2. On sait que pour tout réel $x \neq 1,\ 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-2} + x^{p-1} = \dfrac{1 - x^{(p-1)+1}}{1 - x} = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$.

En particulier, en prenant $x = 10$, on obtient $N_p = \dfrac{10^p - 1}{10 - 1} = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

D'où $10^p - 1 = 9 \times N_p$ avec $N_p \in \mathbb{N}*$. Donc $10^p - 1$ est divisible par 9. (Ou : N_p étant naturel $10^p - 1$ est divisible par 9).

3. Notons [1] l'égalité suivante : $x^n - 1 = (x - 1)\left(1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}\right)$.

a. Avec $N_p = N_{2q} = \dfrac{10^{2q} - 1}{9} = \dfrac{100^q - 1}{9}$ Or d'après [1] avec $x = 100$ et $n = q$, on a : $100^q - 1 = (100 - 1)\left(1 + 100 + \cdots + 100^{q-2} + 100^{q-1}\right) = 99 \times \left(1 + 100 + \cdots + 100^{q-2} + 100^{q-1}\right)$.

Par conséquent $N_p = 11 \times \left(1 + 100 + \cdots + 100^{q-2} + 100^{q-1}\right)$ est divisible par 11.

Autre méthode : $N_{2q} = (1 + 10) + \left(10^2 + 10^3\right) + \cdots + \left(10^{2q-1} + 10^{2q}\right) = (1 + 10) + 10^2(1 + 10) + \cdots + 10^{2q-1}(1 + 10) = 11 \times \left(1 + 10^2 + \cdots + 10^{2q-1}\right)$ qui montre que N_{2q} est divisible par 11.

b. $N_p = N_{3q} = \dfrac{10^{3q} - 1}{9} = \dfrac{1\,000^q - 1}{9}$.

Or d'après [1] avec $x = 1\,000$ et $n = q$, on a :

$1\,000^q - 1 = (1\,000 - 1)\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right) = 9 \times 111 \times \left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$.

Par conséquent $N_p = 111 \times \left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$ est divisible par 111.

Autre méthode : On peut faire des paquets de trois termes qui sont multiples de 111

c. $N_p = N_{kq} = \dfrac{10^{kq} - 1}{9} = \dfrac{(10k)^q - 1}{9}$.

Or en appliquant [1] avec $x = 10k$ et $n = q$, on a :

$(10k)^q - 1 = (10k - 1)\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$.

Ainsi $N_p = \dfrac{(10k - 1)\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)}{9} = \dfrac{10k - 1}{9}\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right) = N_k \times \left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$.

Or $\left(1 + x + \cdots + x^{q-2} + x^{q-1}\right)$ est un entier naturel non nul. Finalement N_p est divisible par N_k.

4. Si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier (car N_p est divisible par N_k avec $1 < N_k < N_p$).

La contraposée de cette implication est : Si N_p est premier, alors p est premier. Autrement dit, pour que N_p soit premier, il faut que p soit premier.

Cette condition n'est pas suffisante, car 3 est premier, mais N_3 ne l'est pas.

Problème — 9 points

Partie A

1. $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x-1}$ est dérivable sur $[0\,;\,1]$ donc par produit la fonction g est dérivable sur $[0\,;\,1]$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 + x\mathrm{e}^{x-1} = (1 + x)\mathrm{e}^{x-1}. Or \mathrm{e}^{x-1} > 0$ et pour $x \in [0\ ;\ 1],\ 1 + x > 0$.

Donc pour tout $x \in [0\ ;\ 1],\ g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

Donc la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

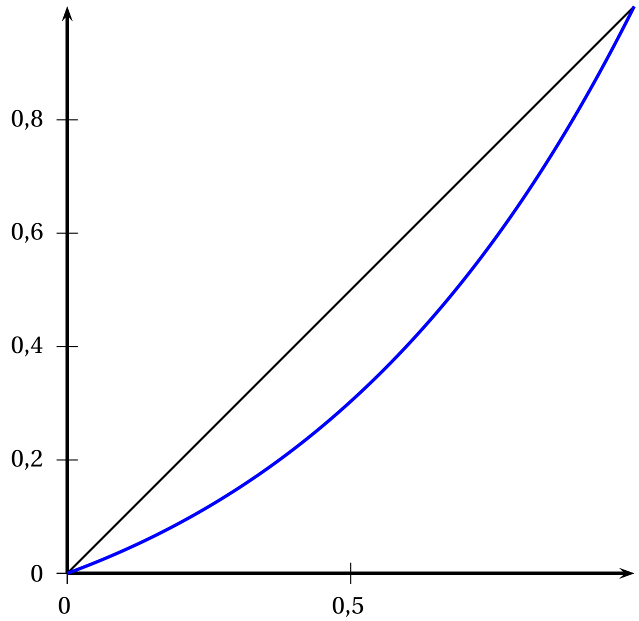
2. $g(x) - x = x\mathrm{e}^{x-1} - x = x\left(\mathrm{e}^{x-1} - 1\right) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}} - 1\right) = x\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$.

$g(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e})$.

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1 \iff 1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$. Donc $\mathrm{e}^x - \mathrm{e} \leqslant 0$.

La fonction g vérifie la condition (3).

3. Le graphe est dessiné ci-dessous



Partie B

1. Remarque : On admet que la fonction f est continue sur $[0\,;\,1]$, cette hypothèse a été omise dans l'énoncé.

Les fonctions $x \longmapsto x$ et f sont continues sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

De plus quel que soit $x \in [0\ ;\ 1]$, $x \geqslant f(x)$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (x - f(x))\,\mathrm{d}x$ est l'aire exprimée en unité d'aire de la surface limitée par la droite d'équation $y = x$, la courbe représentant f et par les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

En conséquence $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 (x - f(x))\,\mathrm{d}x$

2. $\mathrm{I}_g = \displaystyle\int_0^1 (x - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Or d'une part $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ et d'autre part $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$.

Pour calculer cette dernière intégrale on pose :

$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{x-1} \end{array}\right.$ d'où $\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & \mathrm{e}^{x-1} \end{array}$. Toutes ces fonctions étant continues, on intègre par parties :

$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^1 = 1 - 1 + \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Finalement $\mathrm{I}_g = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3. a. $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x - f_n(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - u_n$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $t \in [0~;~1]$, $t \leqslant 1$ donc $t \times t^n \leqslant 1 \times t^n$ donc $t^{n+1} \leqslant t^n$. De plus $1+t>0$ ainsi que son inverse, donc pour $t \in [0~;~1]$, $\dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t}$.

Donc quel que soit $t \in [0~;~1]$, $\dfrac{2t^{n+1}}{1+t}$ et en intégrant sur $[0;1]$ on obtient $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

c. Pour t de $[0;1]$, $t^n \geqslant 0$ et $1+t \geqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$.

d. Donc $0 \leqslant \dfrac{2t^n}{1+t} \leqslant 2t^n$ sur $[0;1]$; donc en intégrant $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 2t^n\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_0^1 2t^n\,\mathrm{d}t = \left[2\frac{1}{1+n}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{2}{1+n}$. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{1+n}$.

e. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1+n} = 0$, d'après le théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.