

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x^2) + x - 2$$

1. • On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.
 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. Sur $]0; +\infty[$, on a $g(x) = 2 \ln x + x - 2$, d'où :

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} + 1. \text{ On a par composition de la dérivation :}$$

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} + 1 = \frac{2+x}{x}.$$

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $2+x$.

Or $x > 0 \implies 2+x > 2 > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

La fonction g est donc croissante et d'après la question précédente de moins l'infini à plus l'infini.

3. a. D'après la question précédente g est continue car dérivable sur $]0; +\infty[$ et croit de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel unique $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
 b. La calculatrice donne :
 $g(1) = -1$ et $g(2) \approx 1,4$, donc $1 < \alpha < 2$;
 $g(1,3) \approx -0,175$ et $g(1,4) \approx 0,07$, donc $1,3 < \alpha < 1,4$;
 $g(1,37) \approx -0,0004$ et $g(1,38) \approx 0,02$, donc $1,37 < \alpha < 1,38$

4. D'où le tableau de signe :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x} \ln(x)$$

1. a. On a successivement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \text{ d'où par quotient de limites } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)}{x} = -\infty;$$

$$\text{D'autre part } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \text{ donc par produit de limites : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

b. Géométriquement le résultat précédent montre que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

2. • On a $\frac{x-2}{x} = \frac{x(1-\frac{2}{x})}{x} = 1 - \frac{2}{x}$

De $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, il suit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = 1$.

• D'autre part on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Donc par produit de limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$,

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on a par dérivation du produit :

$$f'(x) = \frac{1 \times x - 1 \times (x-2)}{x^2} \ln x + \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{x-x+2}{x^2} \ln x + \frac{x-2}{x^2} = \frac{2 \ln x + x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

4. Comme $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle est celui de $g(x)$.

On a vu à la question A. 4. que :

- :sur l'intervalle $]0; \alpha[$, $g(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]0; \alpha[$;
- :sur l'intervalle $]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $]\alpha; \infty[$.

Partie C

$$d(x) = f(x) - \ln x = \frac{(x-2)}{x} \ln(x) - \ln x = \ln x \left[\frac{(x-2)}{x} - 1 \right] = \ln x \left[\frac{x-2-x}{x} \right] = \frac{-2}{x} \ln x.$$

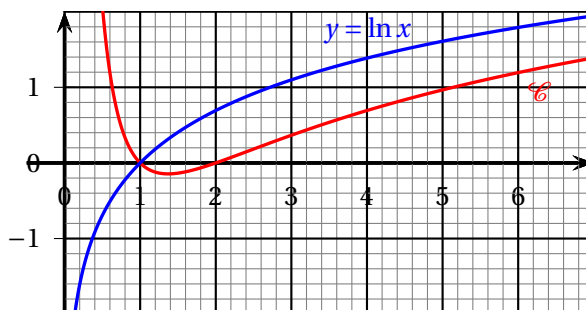
La position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la courbe représentative de la fonction \ln est donnée par le signe de la fonction d .

Comme $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui du produit $-2 \ln x$.

On dresse donc un tableau de signes :

x	0	1	$+\infty$	
-2		-	-	
$\ln x$		-	0	+
$-2 \ln x$		+	0	-

Conclusion : sur l'intervalle $]0; 1[$, la courbe \mathcal{C}_f est au dessus de la courbe logarithme népérien et, sur l'intervalle $]1; +\infty[$ la courbe \mathcal{C}_f est au dessous de la courbe logarithme népérien.



EXERCICE 2

5 points

S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.

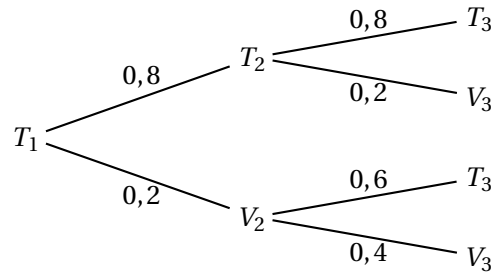
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n -ième jour »
- V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n -ième jour »
- On note p_n la probabilité de l'évènement T_n ,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

1. 2^e et 3^e jours,



2. Calculer p_3

D'après la loi des probabilités totales : $p_3 = p(T_2 \cap T_3) + p(V_2 \cap T_3)$.

$p(T_2 \cap T_3) = p(T_2) \times p_{T_2}(T_3) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$. De même :

$p(V_2 \cap T_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(T_3) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$.

Donc $p_3 = 0,64 + 0,12 = 0,76$.

3. Le 3^e jour, M. Durand utilise son vélo.

Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.

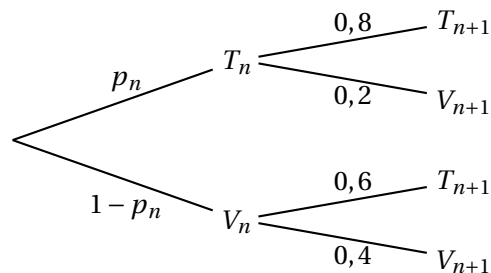
On calcule $p_{V_3}(T_2) = \frac{p(V_3 \cap T_2)}{p(V_3)} = \frac{p(T_2 \cap V_3)}{p(V_3)}$.

Or $p(V_3) = 1 - p_3 = 1 - 0,76 = 0,24$ et

$p(T_2 \cap V_3) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$, d'où

$p_{V_3}(T_2) = \frac{0,16}{0,24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n -ième et $(n + 1)$ -ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.

On a $p_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(V_n \cap T_{n+1}) = 0,8p_n + 0,6(1 - p_n) = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6$.

6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a $p_1 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{1-1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^0 = 0,72 + 0,25 = 1$: la relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

Alors d'après la question 5. $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$, d'où en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$p_{n+1} = 0,2(0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}) + 0,6 = 0,15 + 0,25 \times 0,2^n + 0,6 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$: l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n au moins égal à 1 elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $-1 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,25 \times 0,2^{n-1} = 0$ et par somme de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,75 = \frac{3}{4}$.

Au bout d'un certain nombre de jours Monsieur Durand prendra les transports en commun 3 jours sur 4.

EXERCICE 3

5 points

1. Une primitive de la fonction f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$, est la fonction F , définie sur \mathbb{R} , par : Avec $F(x) = (x-1)e^x$, on a $F'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x(1+x-1) = xe^x$. Réponse **b**.

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$.

La fonction est définie quand l'argument du logarithme est supérieur à zéro donc quand

$$\frac{x-1}{2x+4} > 0 \text{ ou ce qui revient au même quand } (x-1)(2x+4) = 0.$$

Or ce trinôme du second degré a deux zéros -2 et 1 et son coefficient dominant est $+2$, donc ce trinôme est positif sauf entre les racines -2 et 1 . Réponse **c**.

3. La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (x+1)e^x$ est :

On peut calculer $h'(x) = (x+2)e^x$, puis $h''(x) = (x+3)e^x$.

Comme $e^x > 0$ quel que soit le réel x le signe de $h''(x)$ est celui de $x+3$ qui est positif sur $] -3 ; +\infty[$. Sur cet intervalle la fonction est convexe. Réponse **d**.

4. Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ .

La limite est supérieure ou égale à 3. Réponse **b**.

5. La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif,

$w_{n+1} = \frac{1}{n}w_n$. On peut démontrer rapidement par récurrence de :

$$w_1 = 2, \quad w_2 = \frac{2}{1} = 2, \quad w_3 = 1, \quad w_4 = \frac{1}{3}w_3 = \frac{1}{3} = \frac{2}{2 \times 3} = \frac{2}{(4-1)!}, \dots$$

que $w_n = \frac{2}{(n-1)!}$, avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(n-1)!} = 0$. Réponse **d**.

EXERCICE 4

5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; -3; 2), \quad B(3; -2; 6) \quad \text{et} \quad C(1; 2; -4).$$

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan \mathcal{P} .

2. a. On a :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 13 + 1 \times (-16) + 4 \times (-9) = 52 - 16 - 36 = 52 - 52 = 0$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 13 + 5 \times (-13) + (-6 \times (-9)) = 26 - 65 + 54 = 52 - 52 = 0$.

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} : il est normal à ce plan.

- b. On sait que $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0$ et que a, b et c sont les composantes d'un vecteur normal à ce plan donc par exemple \vec{n} .

$$\text{On a donc } M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 13x - 16y - 9z + d = 0.$$

$$\text{par exemple } C(1; 2; -4) \in \mathcal{P} \iff 13 \times 1 + 2 \times (-16) - 9 \times (-4) + d = 0 + d = 0 \iff 13 - 32 + 36 + d = 0 \iff 17 + d = 0 \iff d = -17.$$

$$\text{On a donc } M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 13x - 16y - 9z - 17 = 0.$$

On note \mathcal{D} la droite passant par le point F(15; -16; -8) et orthogonale au plan \mathcal{P} .

3. La droite \mathcal{D} étant orthogonale au plan \mathcal{P} a pour vecteur directeur le vecteur \vec{n} normal au plan \mathcal{P} .

$$\text{On a donc } M(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{FM} = t \vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ soit } \begin{cases} x - 15 = 13t \\ y + 16 = -16t \\ z + 8 = -9t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Si E(x; y; z) est commun à la droite \mathcal{D} et au plan \mathcal{P} , ses coordonnées vérifient les équations de la droite et celle du plan donc le système :

$$\begin{cases} x - 15 = 13t \\ y + 16 = -16t \\ z + 8 = -9t \\ 13x - 16y - 9z - 17 = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans l'équation du plan, on obtient :

$$13(13t + 15) - 16(-16t - 16) - 9(-9t - 8) - 17 = 0 \iff 169t + 195 + 256t + 256 + 81t + 72 - 17 = 0 \iff 506t + 506 = 0 \iff t = -1.$$

En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite \mathcal{D} , on obtient :

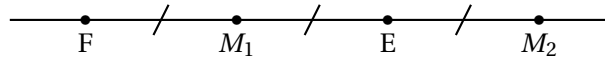
$$\begin{cases} x - 15 = -13 \\ y + 16 = 16 \\ z + 8 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc E(2; 0; 1).

5. F et E appartiennent à la droite \mathcal{D} perpendiculaire au plan \mathcal{P} , donc la distance du point F au plan est égale à FE.

$$\text{Or } FE^2 = (-13)^2 + 16^2 + 9^2 = 169 + 256 + 81 = 506. \text{ D'où } FE = \sqrt{506}.$$

6. Comme précédemment si $M \in \mathcal{D}$ perpendiculaire au plan \mathcal{P} la distance de ce point au plan \mathcal{P} est ME.



- Premier point répondant à la question : M_1 tel que $\overrightarrow{EM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

$$\text{De } \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}, \text{ on déduit que } \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM_1} \begin{pmatrix} 6,5 \\ -8 \\ -4,5 \end{pmatrix}, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2 = 6,5 \\ y_1 - 0 = -8 \\ z - 1 = -4,5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 8,5 \\ y_1 = -8 \\ z = -3,5 \end{cases}$$

- Deuxième point répondant à la question : M_2 tel que $\overrightarrow{EM_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

$$\text{De } \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}, \text{ on déduit que } -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM_2} \begin{pmatrix} -6,5 \\ 8 \\ 4,5 \end{pmatrix}, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x_2 - 2 = -6,5 \\ y_2 - 0 = 8 \\ z_2 - 1 = 4,5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -4,5 \\ y_2 = 8 \\ z_2 = 5,5 \end{cases}$$

Donc $M_1(8,5 ; -8 ; -3,5)$ et $M_2(-4,5 ; 8 ; 5,5)$.