Corrigé du baccalauréat ES–L Antilles–Guyane juin 2016

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

1. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$:

x	-1		1		2		3
variations de f	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-0,5$

Dans l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

a. exactement 3 solutions

$\boxed{\textbf{b.}\ \text{exactement 2 solutions}}$

c. exactement 1 solution

d. pas de solution

D'après le tableau de variation de f, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ et une autre dans l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.

2. L'équation $\ln(2x) = 2$ admet une unique solution x_0 sur $\mathbf{R}$. On a :

a. $x_0 = 0$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{b. } x_0 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}}$ $\qquad$ **c.** $x_0 = \dfrac{\ln 2}{2}$ $\qquad$ **d.** $x_0 = 3,6945$

$$\ln(2x) = 2 \iff 2x = \mathrm{e}^2 \iff x = \frac{\mathrm{e}^2}{2}$$

3. La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 400$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

La somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ est égale à :

a. $2 \times \left(1 - 0,5^{10}\right)$ $\qquad$ **b.** $2 \times \left(1 - 0,5^{11}\right)$

c. $800 \times \left(1 - 0,5^{10}\right)$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{d. } 800 \times \left(1 - 0.5^{11}\right)}$

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} = 400 \times \frac{1 - 0,5^{11}}{1 - 0,5} = 800\left(1 - 0,5^{11}\right)$$

4. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Variables :    n est un nombre entier naturel
               U est un nombre réel
Traitement :   Affecter à n la valeur 0
               Affecter à U la valeur 50
               Tant que U < 120 faire
                  | U prend la valeur 1,2 × U
                  | n prend la valeur n + 1
               Fin Tant que
Sortie :       Afficher n
```

En fin d'exécution, cet algorithme affiche la valeur :

a. 4 $\qquad$ **b.** 124,416 $\qquad$ $\boxed{\textbf{c.}\ 5}$ $\qquad$ **d.** 96

On fait tourner l'algorithme qui affichera n dès que U sera supérieur ou égal à 120 :

U	50	60	72	86,4	103,68	124,416
n	0	1	2	3	4	5

5. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 2 + 3\ln(x)$.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation :

a. $y = \dfrac{3}{x}$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{b.}\ \ y = 3x - 1}$ $\qquad$ **c.** $y = 3x$ $\qquad$ **d.** $y = 3x + 2$

$f'(x) = \dfrac{3}{x}$ donc $f'(1) = 3$; $f(1) = 2$; la tangente a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ qui donne $y = 3x - 1$.

EXERCICE 2 Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

5 points

Partie A

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.
Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 40 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 9 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance sans franchise.

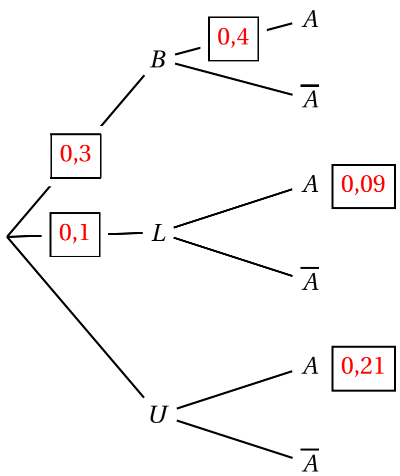
On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

- B : le client a loué une berline.
- L : le client a loué un véhicule de luxe.
- U : le client a loué un véhicule utilitaire.
- A : le client a choisi l'option d'assurance sans franchise.

1. Avec les données de l'énoncé, on peut dire que :

$$P(B) = 0{,}3,\ P_B(A) = 0{,}4,\ P(L) = 0{,}1,\ P(L\cap A) = 0{,}09 \text{ et } P(U\cap A) = 0{,}21.$$

On place ces résultats dans l'arbre :



2. L'évènement « le client a loué une berline et a choisi l'option d'assurance sans franchise » est l'évènement $B\cap A$.
D'après l'arbre : $P(B\cap A) = P(B) \times P_B(A) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.

3. On cherche $P(A)$; d'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(B\cap A) + P(L\cap A) + P(U\cap A) = 0{,}12 + 0{,}09 + 0{,}21 = 0{,}42$.

4. $P_L(A) = \dfrac{P(L\cap A)}{P(L)} = \dfrac{0{,}09}{0{,}1} = 0{,}9$.

Partie B

Le temps d'attente au guichet de l'agence de location, exprimé en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$.

1. La probabilité d'attendre plus de 12 minutes est : $P(T \geqslant 12) = P(12 \leqslant T \leqslant 20) = \dfrac{20-12}{20-1} = \dfrac{8}{19} \approx 0{,}42$.
2. Le temps d'attente moyen est $\dfrac{1+20}{2} = 10{,}5$ minutes.

Partie C

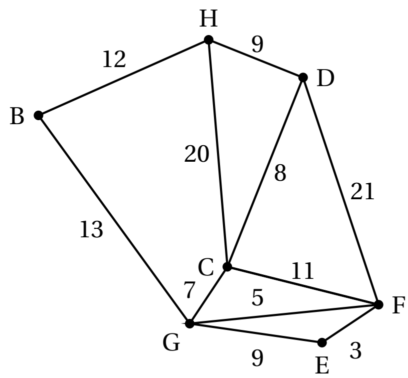
Cette agence de location propose l'option retour du véhicule dans une autre agence.
Une étude statistique a établi que le nombre mensuel de véhicules rendus dans une autre agence peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 220$ et d'écart-type $\sigma = 30$.
Si pour un mois donné, le nombre de véhicules rendus dans une autre agence dépasse 250 véhicules, l'agence doit prévoir un rapatriement des véhicules.
À l'aide de la calculatrice : $P(X > 250) \approx 0{,}16$.

Remarque
C'est un résultat que l'on aurait pu trouver sans calculatrice car $P(X > 250)$ correspond à $P(X > \mu+\sigma)$ et que l'on sait que $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}68$; donc $P(X > \mu+\sigma) = \dfrac{1-0{,}68}{2}$.

EXERCICE 2 Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

Des touristes sont logés dans un hôtel H.
Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.
Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre.
Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. **a.** Rechercher un chemin qui part d'un sommet, qui passe par toutes les arêtes une seule fois et qui revient au sommet de départ, c'est chercher un cycle eulérien dans le graphe.
D'après le théorème d'EULER, un graphe possède un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degrés pairs.
On cherche les degrés des sommets :

Sommets	H	B	C	D	E	F	G
Degrés	3	2	4	3	2	4	4

Il y a deux sommets de degrés impairs, donc il n'y a pas de cycle eulérien dans ce graphe : le guide ne peut pas emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant.

b. Le guide souhaite partir de l'hôtel et parcourir tous les tronçons de route sans forcément revenir à l'hôtel; il s'agit alors de trouver une chaîne eulérienne dans ce graphe.
D'après le théorème d'EULER, un graphe contient une chaîne eulérienne si et seulement si exactement deux de ses sommets sont de degrés impairs. C'est le cas ici car seuls les sommets H et D sont de degrés impairs; on peut donc trouver un parcours partant de H et arrivant à D passant une et une seule fois par chaque tronçon de route.
Voici un tel parcours : HB – BG – GC – CH – HD – DC – CF – FG – GE – EF – FD

2. Un musée est situé en E.
On va déterminer le chemin le plus court reliant H à E en utilisant l'algorithme de Dijkstra :

H	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	H
	12 H	20 H	9 H	∞	∞	∞	D (H)
	12 H	~~20 H~~ 17 D		∞	30 D	∞	B (H)
		17 D		∞	30 D	25 B	C (D)
				∞	~~30 D~~ 28 C	~~25 B~~ 24 C	G (C)
				33 G	28 C		F (C)
				~~33 G~~ 31 F			E (F)

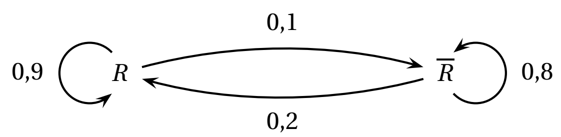
Le chemin de longueur minimale 31 km entre H et E est : H $\xrightarrow{9}$ D $\xrightarrow{8}$ C $\xrightarrow{11}$ F $\xrightarrow{3}$ E

Partie B

L'office de tourisme évalue chaque année les hôtels de sa région et répertorie les meilleurs sur son site internet. On admet que dans cette région, la création ou la disparition d'hôtels est négligeable.
On constate que, chaque année :

- 10 % des hôtels répertoriés ne seront plus répertoriés l'année suivante;
- 20 % des hôtels non répertoriés sur le site seront répertoriés l'année suivante.

1. On notera R l'évènement « l'hôtel est répertorié » et $\overline{R}$ son évènement contraire; on réalise un graphe décrivant la situation :



2. D'après le cours, en prenant les sommets dans l'ordre R et $\overline{R}$, la matrice de transition de ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

3. En 2015, 30 % des hôtels de la région étaient répertoriés. On appelle P_n l'état donnant la répartition des hôtels répertoriés et ceux qui ne le sont pas l'année $2015+n$; on représente cet état par une matrice 1 ligne 2 colonnes. On a donc pour l'année 2015, correspondant à $n=0$: $P_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.
En 2016 l'état sera :
$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \times 0,9 + 0,7 \times 0,2 & 0,3 \times 0,1 + 0,7 \times 0,8 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}0{,}41 & 0{,}59\end{pmatrix}$

Donc le pourcentage d'hôtels répertoriés en 2016 sera de 41 %.

En 2017 l'état sera :

$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix}0{,}41 & 0{,}59\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}41\times 0{,}9 + 0{,}59 \times 0{,}2 & 0{,}41 \times 0{,}1 + 0{,}59 \times 0{,}8\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0{,}487 & 0{,}513\end{pmatrix}$

Donc le pourcentage d'hôtels répertoriés en 2017 sera de 48,7 %.

4. La matrice de transition ne comportant aucun zéro, l'état P_n converge vers l'état stable du système, c'est-à-dire la matrice $P = \begin{pmatrix}r & 1-r\end{pmatrix}$ telle que $P \times M = P$.

$P \times M = P \iff \begin{pmatrix}r & 1-r\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\\0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r & 1-r\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl}0{,}9r + 0{,}2(1-r) & = & r\\0{,}1r + 0{,}8(1-r) & = & 1-r\end{array}\right. \iff$
$0{,}2 = 0{,}3r \iff r = \dfrac{2}{3}$

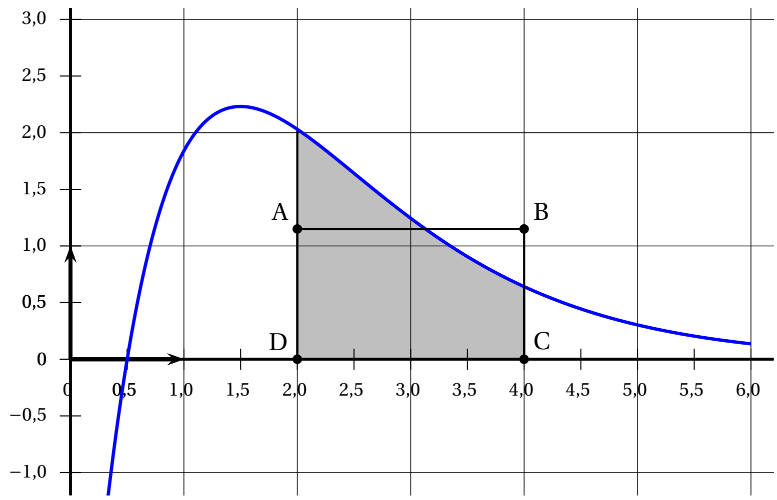
L'état stable du système est donc la matrice $P = \begin{pmatrix}\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Donc, à long terme, il y aura les deux tiers des hôtels qui seront répertoriés, soit 66,67 %.

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 7 points

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

ABCD est un rectangle, le point D a pour coordonnées $(2 ; 0)$ et le point C a pour coordonnées $(4 ; 0)$.



Partie A

1. $f(x) > 0 \iff x \in]0{,}5 ; 6]$
2. Une valeur approchée du maximum de la fonction f sur $[0 ; 6]$ est 2,2.
3. Sur l'intervalle $[2 ; 6]$, la fonction f est décroissante donc $f'(x)$ est négatif.
4. Pour $x = 1{,}5$, la courbe est en dessous de sa tangente; pour $x = 5$, la courbe est au dessus de sa tangente. Il semble donc qu'entre 1,5 et 5, la fonction va passer de concave à convexe et donc qu'il y aura un point d'inflexion sur $[1{,}5 ; 5]$.
5. Comme la fonction f est positive sur $[2 ; 4]$, $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ est, en unité d'aire, l'aire du domaine grisé sur le graphique.

   Il semble que $2 < \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x < 3$.

Partie B

La fonction f est la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~6]$ par $f(x) = (10x-5)\mathrm{e}^{-x}$.
On donne $f'(x) = (-10x+15)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x) = (10x-25)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. $f'(x) = (-10x+15)\,\mathrm{e}^{-x}$ et on sait que, pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$; donc $f'(x)$ est du signe de $-10x+15$.
$-10x+15 > 0 \iff 15 > 10x \iff 1{,}5 > x \iff x < 1{,}5$
$f(x) = (10x-5)\,\mathrm{e}^{-x}$ donc $f(0) = -5\,\mathrm{e}^{0} = -5$ et $f(6) = 55\,\mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}14$
$f(1{,}5) = 10\,\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 2{,}23$ est le maximum de la fonction f sur $[0~;~6]$, atteint pour $x = 1{,}5$.
D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0		$1{,}5$		6
$-10x+15$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	$10\,\mathrm{e}^{-1{,}5}$	$\searrow$	$55\,\mathrm{e}^{-6}$

2. La convexité de la fonction f dépend du signe de sa dérivée seconde f''.
$f''(x) = (10x-25)\,\mathrm{e}^{-x}$ et, pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $10x-25$:
$10x-25 > 0 \iff 10x > 25 \iff x > 2{,}5$
Sur $[0~;~2{,}5[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
Sur $]2{,}5~;~6]$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
En $x = 2{,}5$, la fonction f'' s'annule et change de signe, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse $2{,}5$.

3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~6]$ par $F(x) = (-10x-5)\,\mathrm{e}^{-x}$.
$F'(x) = -10\,\mathrm{e}^{-x} + (-10x-5)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-10+10x+5)\,\mathrm{e}^{-x} = (10x-5)\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$
Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0~;~6]$.

4. On en déduit que $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = -45\,\mathrm{e}^{-4} - \left(-25\,\mathrm{e}^{-2}\right) = 25\,\mathrm{e}^{-2} - 45\,\mathrm{e}^{-4} \approx 2{,}56$ unités d'aire.

5. On souhaite que l'aire du rectangle ABCD soit égale à l'aire du domaine grisé sur la figure.
L'aire du rectangle est $\mathrm{AD} \times \mathrm{DC} = 2\mathrm{AD}$.
Cette aire doit être égale à l'aire grisée donc à $25\,\mathrm{e}^{-2} - 45\,\mathrm{e}^{-4}$:
$2\mathrm{AD} = 25\,\mathrm{e}^{-2} - 45\,\mathrm{e}^{-4} \iff \mathrm{AD} = 12{,}5\,\mathrm{e}^{-2} - 22{,}5\,\mathrm{e}^{-4}$ donc $\mathrm{AD} \approx 1{,}28$

Remarque

La hauteur AD est la valeur moyenne de la fonction f sur $[2~;~4]$: $\mathrm{AD} = \dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 3 points

Afin de lutter contre la pollution de l'air, un département a contraint dès l'année 2013 certaines entreprises à diminuer chaque année la quantité de produits polluants qu'elles rejettent dans l'air.
Ces entreprises ont rejeté 410 tonnes de ces polluants en 2013 et 332 tonnes en 2015. On considère que le taux de diminution annuel de la masse de polluants rejetés est constant.

1. Diminuer de 10 %, c'est multiplier par $1-\dfrac{10}{100}=0,9$.

Diminuer de 10 % deux années de suite, c'est multiplier par $0,9^2=0,81$.

Les entreprises on rejeté 410 tonnes en 2013 ; avec une diminution de 10 % par an deux années de suite, la masse de polluants rejetés serait de $410\times 0,81=332,1$ tonnes, voisins des 332 tonnes rejetées en 2015.

On peut donc considérer que l'évolution d'une année sur l'autre correspond à une diminution de 10 %.

2. On admet que ce taux de diminution de 10 % reste constant pour les années à venir.

Soit (m_n) la suite donnant la masse de produits polluants rejetés l'année $2015+n$.

On a donc $m_0=332$ et, pour tout n, $m_{n+1}=0,9m_n$.

La suite (m_n) est donc une suite géométrique de premier terme $m_0=332$ et de raison $q=0,9$.

Donc, pour tout n, $m_n=m_0\times q^n=332\times 0,9^n$.

On cherche la première valeur de n pour laquelle $m_n\leqslant 180$; pour cela, on résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
m_n\leqslant 180 &\iff 332\times 0,9^n\leqslant 180\\
&\iff 0,9^n\leqslant\frac{180}{332}\\
&\iff \ln\left(0,9^n\right)\leqslant\ln\frac{180}{332} && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;\,+\infty[\\
&\iff n\times\ln 0,9\leqslant\ln\frac{180}{332} && \text{propriété de la fonction ln}\\
&\iff n\geqslant\frac{\ln\frac{180}{332}}{\ln 0,9} && \text{car }\ln 0,9<0
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln\frac{180}{332}}{\ln 0,9}\approx 5,8$ donc l'objectif de produire moins de 180 tonnes de polluants sera atteint pour $n\geqslant 6$, c'est-à-dire à partir de 2021.