∽ Corrigé du baccalauréat de technicien hôtellerie ∾ Métropole–La Réunion 11 septembre 2014

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 **8 points**

1. **a.** Augmenter un prix de 3 %, c'est multiplier celui-ci par $1+\dfrac{3}{100}=1,03$.
   Le prix en 2015 sera donc : $36,05\times 1,03=37,595\approx 35,60$ €.
   b. Si t était le prix en 2013, on doit avoir :
   $t\times 1,03=36,05 \iff t=\dfrac{36,05}{1,03}=35$ €.
2. (ainsi $P_0=36,05$).
   a. On a calculé $P_1\approx 35,60$.
   $P_2=P_1\times 1,03\approx 37,69$ €, puis $P_3=P_2\times 1,03\approx 38,82$ €.
   b. On passe d'un terme au suivant en le multipliant par le facteur constant 1,03 : on a donc les termes successifs d'une suite géométrique de premier terme P_0 et de raison $r=1,03$.
   c. On sait que pour tout naturel n, $P_n=P_0\times r^n$ ou encore :
   $P_n=36,05\times 1,03^n$.
   d. 2022 correspond à $n=8$, d'où $P_8=36,05\times 1,03^8\approx 45,67$ €.
   e. Il faut résoudre l'équation : $P_n=P_0\times r^n=2P_0 \iff r^n=2$ ou encore
   $n\ln 1,03=\ln 2 \iff n=\dfrac{\ln 2}{\ln 1,03}\approx 23,4$
   n devant être un entier, il faut donc attendre 24 ans pour que le prix double, soit en 2038.
3. Au bout de 10 ans le nouveau prix est $P10=36,05\times 1,03^{10}\approx 48,45$ €.
   Ce nouveau prix correspond à une augmentation en pourcentage de :
   $\dfrac{48,45-36,05}{36,05}\times 100=\dfrac{12,4}{36,05}\times 100\approx 34\,\%$.
   Le restaurateur n'a pas raison.

EXERCICE 2 **12 points**

Partie A

$$f(x)=ax+25000+250\ln(x),$$

1. Sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$,on a :
   $f'(x)=a+250\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax}{x}+\dfrac{250}{x}=\dfrac{ax+250}{x}$.
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est égal au nombre dérivé $f'(1)$.
   On a donc $f'(1)=400 \iff \dfrac{a\times 1+250}{1}=400 \iff a+250=400 \iff$
   $a=150$.

3. On a donc sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{150x+250}{x}$.

Comme $x \geqslant 1 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $150x + 250$.

- $150x + 250 > 0 \iff 150x > -250 \iff x > -\dfrac{250}{150} \iff x > -\dfrac{5}{3}$.

Or $x \geqslant 1$, donc $x > -\dfrac{5}{3}$, donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, ce qui montre que la fonction f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Partie B

$$f(x) = 150x + 25\,000 + 250\ln(x).$$

1. On trace la droite horizontale d'équation $y = 30\,000$ qui coupe la courbe représentative de f en un point dont l'abscisse est environ : 28 (en fait un peu moins mais x est un entier).

La calculatrice donne $f(28) \approx 30\,033 > 30\,000$ €

2. **a.** On a $A(x) = 750x$.

b. Voir à la fin.

c. Les deux courbes sont sécantes en un point dont l'abscisse est supérieure à 43.

On a $f(43) \approx 32\,390{,}30$ et $A(43) = 32\,250$;

$f(44) \approx 32\,546$ et $A(44) = 33\,000$: les recettes sont supérieures à la dépense.

Le propriétaire sera bénéficiaire s'il loue ses bungalows au moins 44 semaines.

3. La dépense en 22 semaines est : $f(22) \approx 29\,072{,}80$.

Si ℓ est le prix de la location pour une semaine, il faut que la recette soit supérieure ou égale à la dépense, soit :

$22\ell \geqslant 29\,072{,}80 \iff \ell \geqslant \dfrac{29\,072{,}80}{22}$

Or $\dfrac{29\,072{,}80}{22} \approx 1\,321{,}49$.

Le seuil de rentabilité sera atteint sur la saison s'il loue ses bungalows au moins 1 322 €la semaine.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2 : courbe de la fonction