Corrigé du baccalauréat de technicien hôtellerie Métropole juin 2012

EXERCICE 1 **11 points**

1. Les variables x et y sont soumises à plusieurs contraintes :

- x est un nombre de desserts donc x est positif ou nul $x \geqslant 0$;
- y est également un nombre de desserts donc y est positif ou nul $y \geqslant 0$;
- Contrainte sur la matière première : le montant des matières premières pour la fabrication de x desserts A est de $10x$, celui pour la fabrication de y desserts B est de $20y$.

Donc le montant total des matières premières est de $10x + 20y$.

Or ce montant est limité à 700€. Donc $10x + 20y \leqslant 700$.

- Contrainte sur les heures de travail : la fabrication de x desserts A nécessite $3x$ heures de travail et celle de y desserts B nécessite $1,5y$ heures de travail. Or le temps de travail est limité à 120 heures. Donc $3x + 1,5y \leqslant 120$.

Conclusion x et y doivent vérifier le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0\\ y & \geqslant & 0\\ 10x+20y & \leqslant & 700\\ 3x+1,5y & \geqslant & 120\end{array}\right.$$

On a $10x + 20y \leqslant 700$ ou $20y \leqslant 700 - 10x$ ou encore $y \leqslant -\dfrac{1}{2}x + 35$

De même $3x + 1,5y \geqslant 120$ peut s'écrire $6x + 3y \geqslant 240$ ou en simplifiant par 3 :

$2x + y \geqslant 80$ et finalement $y \geqslant -2x + 80$.

On a donc

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0\\ y & \geqslant & 0\\ y & \leqslant & -\dfrac{1}{2}x+35\\ y & \geqslant & -2x+80\end{array}\right.$$

2. **a.** Voir l'annexe à la fin.

b. Soit $I((x_I\ ;\ y_I)$.

Ses coordonnées vérifient :

$y_I = -\dfrac{1}{2}x_I + 35 = y_I = -2x_I + 80 \iff 2x_I -, \dfrac{1}{2}x_I = 80 - 35 \iff \dfrac{3}{2}x_I = 45 \iff 3x_I = 90 \iff x_I = 30.$

On en déduit que $y_I = 80 - 2x_I = 80 - 2 \times 30 = 80 - 60 = 20$.

Le point I a donc pour coordonnées $(30\,;\,20)$.

3. Voir sur l'annexe.

4. On voit que le point de coordonnées $(25\,;\,20)$ est dans la partie non hachurée : le traiteur peut proposer ce choix.

Le point de coordonnées $(20\,;\,30)$ est dans la partie hachurée : le traiteur ne peut pas proposer ce choix.

5. **a.** x desserts A donnent un bénéfice de $6x$ et y desserts B un bénéfice de $8y$. Le bénéfice est donc $b = 6x + 8y$.

b. Pour $b = 240$, on a donc :
$6x + 8y = 240 \iff \dfrac{6}{8}x + y = 30 \iff y = -\dfrac{3}{4}x + 30$, équation de la droite d_{240}.
On voit sur l'annexe que la droite d_{240} traverse la zone non hachurée : il existe donc plusieurs couples $(x\ ;\ y)$ donnant un bénéfice de 240 €.

c. De même pour $b = 400$, on a :
$400 = 6x + 8y \iff 50 = \dfrac{6}{8} + y \iff y = 50 - \dfrac{3}{4}x$ équation de la droite d_{400}.
On constate que cette droite ne traverse pas la zone non hachurée : un bénéfice de 400 € est donc impossible à réaliser.

d. Les droites « bénéfice » ont toutes la même pente. La droite bénéfice la plus « haute » est celle qui contient le point de coordonnées (30 ; 20), ce qui donne un bénéfice de : $6 \times 30 + 8 \times 20 = 180 + 160 = 340$ €.
Le bénéfice maximal est égal à 340 €.

EXERCICE 2 — 9 points

$$f(x) = 40x + \frac{1\,000}{x} \quad \text{sur l'intervalle } [2\ ;\ 10]$$

Partie A

1. La dérivée de la fonction qui à x associe $\dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ est la fonction $-\dfrac{1}{x^2}$, donc :
pour $x \in [2\ ;\ 10]$, $f'(x) = 40 - \dfrac{1\,000}{x^2} = \dfrac{40x^2 - 1\,000}{x^2}$.

2. On développe : $40(x-5)(x+5) = 40\left(x^2 + 25\right) = 40x^2 - 40 \times 25 = 40x^2 - 1\,000$.
On a bien $f'(x) = \dfrac{40(x-5)(x+5)}{x^2}$.

3. Comme $x^2 > 0$, pour $x \in [2\ ;\ 10]$, le signe de $f'(x)$ est celui du produit $(x-5)(x+5)$.
Un tableau de signes donne le signe de ce produit, donc de la dérivée $f'(x)$, d'où on déduit les variations de f :

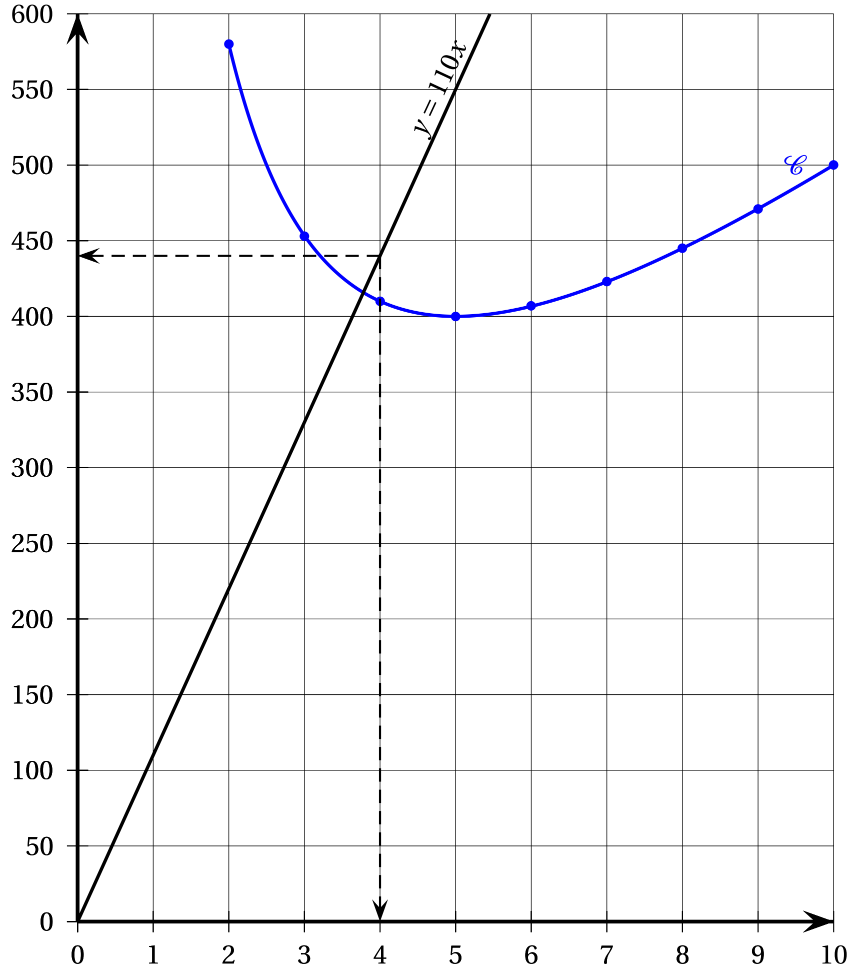
x	2		5		10
signe de $x-5$		$-$	0	$+$	
signe de $x+5$		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	580	$\searrow$	400	$\nearrow$	500

- $f(2) = 40 \times 2 + \dfrac{1\,000}{2} = 80 + 500 = 580$;
- $f(5) = 40 \times 5 + \dfrac{1\,000}{5} = 200 + 200 = 400$;
- $f(10) = 40 \times 10 + \dfrac{1\,000}{10} = 400 + 100 = 500$.

4. Le tableau montre que le coût de production est minimum pour $x = 5$; il est alors égal à $f(5) = 400$ euros.

Partie B

1. La recette pour x séjours vendus est $110x$, donc pour 3 séjours vendus, le bénéfice est :
$b(3) = 110 \times 3 - f(3) = 330 - \left(40 \times 3 + \dfrac{1\,000}{3}\right) = 330 - 120 - \dfrac{1\,000}{3} \approx 210 - 333,33 \approx -123,33$ euros.
2. De même pour 9 séjours vendus, le bénéfice est égal à :
$110 \times 9 - f(9) = 990 - 40 \times 9 - \dfrac{1\,000}{9} = 990 - 360 - \dfrac{1\,000}{9} \approx 630 - 111,11 \approx 518,89.$
3. On a $R(x) = 110x$.
4.



5. Le premier point de la droite d'équation $y = 110x$, d'abscisse entière et dont l'ordonnée est supérieure à celle du point de $\mathscr{C}$ de même abscisse est obtenu pour $x = 4$. Pour être bénéficiaire, il faut vendre au moins 4 séjours.

ANNEXE

À remettre avec la copie

Pour l'exercice 1 question 2