Corrigé du baccalauréat STMG Antilles–Guyane 7 septembre 2017

La page 6 est une annexe au sujet, à rendre avec la copie.

Exercice 1 **5 points**

Les objets connectés sont des appareils reliés à Internet qui communiquent avec d'autres systèmes pour obtenir ou fournir de l'information.
Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul, donne une estimation du nombre d'objets connectés (en milliards) dans le monde entre les années 2011 et 2015.
Les cellules de la plage (C3 : F3) sont au format pourcentage.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2011	2012	2013	2014	2015
2	Nombre d'objets connectés (en milliards)	9,5	15	22	31	42
3	Taux d'évolution du nombre d'objets connectés par rapport à 2011					

Source : IDATE (Institut de l'audiovisuel et des télécommunications en Europe)

1. Parmi les quatre formules suivantes, écrire sur la copie celle qui, saisie en C3 puis recopiée à droite, permet de calculer le taux d'évolution du nombre d'objets connectés par rapport à 2011 :

   =C2/\$B2 =(\$C2-B2)/B2 =C2-\$B2/\$B2 =(C2-\$B2)/\$B2

   la formule à saisir en C3 est =(C2-\$B2)/\$B2

   La première donnerait le coefficient multiplicateur, dans la deuxième le terme en C2 est fixe le changement de colonne C est impossible, dans la troisième les parenthèses sont absentes, nous obtiendrions C2-1

2. Calculons le taux d'évolution en pourcentage du nombre d'objets connectés entre 2011 et 2015, arrondi au dixième.

   Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$. $\mathcal{T} = \dfrac{42-9{,}5}{9{,}5} \approx 3{,}421$.

   Le taux d'évolution en pourcentage du nombre d'objets connectés entre 2011 et 2015, arrondi au dixième est 342,1 %.

3. Calculons le taux moyen annuel d'évolution du nombre d'objets connectés entre 2011 et 2015

   En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^4$ puisque le nombre d'objets connectés a subi 4 évolutions durant cette période.

   $(1+t_m)^4 = \dfrac{42}{1\,285{,}40} \approx 4{,}421\,052\,6$ par conséquent $t_m = 4{,}421\,052\,6^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0{,}450\,0$.

   Le taux annuel moyen d'évolution du nombre d'objets connectés entre 2011 et 2015 est de 45 % arrondi à 1 %.

4. Suite à l'étude de certains instituts, on suppose que le nombre d'objets connectés augmentera de 15 % par an après 2015.

   Suivant ce modèle, on note u_n le nombre d'objets connectés en milliards pour l'année $(2015+n)$ (où n est un entier naturel).

   Ainsi, $u_0 = 42$.

   a. À une augmentation de 15 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,15.
   $u_1 = 1{,}15 \times 42 \approx 48$ et $u_2 = 42 \times 1{,}15^2 \approx 56$, arrondis à l'unité.

   b. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,15 et de premier terme 42.

   c. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 42 \times (1{,}15)^n$.

   d. $u_5 = 42 \times (1{,}15)^5 \approx 84$ arrondi à l'unité. Cette valeur est le nombre en milliards, selon ce modèle, d'objets connectés en 2020.

5. On estime que la population mondiale sera d'environ 7,75 milliards en 2020.

Dans ces conditions et à l'aide de la question 4. d., un être humain aura en moyenne plus de 10 objets connectés en 2020. Puisque l'on estime la population à 7,75 milliards, nous aurions besoin de seulement 77,5 milliards d'objets connectés or selon ce modèle l'estimation est d'environ 84 milliards d'objets connectés ce qui est largement suffisant pour attribuer dix objets connectés à chaque être humain.

Exercice 2 — 5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième.
Tous les 5 ans, l'établissement INVS (Institut national de veille sanitaire) réalise une enquête sur les infections nosocomiales (infections contractées au cours d'une hospitalisation).
Lors de la dernière enquête, on a obtenu les résultats suivants :

- 53 % des personnes hospitalisées étaient âgées de 66 ans ou plus.
  Parmi eux, 6,4 % ont été atteints par une infection nosocomiale.
- 6 % des personnes hospitalisées étaient âgées de 14 ans ou moins.
  Parmi eux, 2,4 % ont été atteints par une infection nosocomiale.
- Parmi les patients âgés de 15 à 65 ans, 3,7 % ont été atteints par une infection nosocomiale.

Partie A

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ont participé à cette enquête. On considère les évènements suivants :

- E : « La personne est âgée de 0 à 14 ans »
- F : « La personne est âgée de 15 à 65 ans »
- G : « La personne est âgée de plus de 65 ans »
- N : « La personne est atteinte par une infection nosocomiale »

Pour tout évènement A, on notera $p(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. En utilisant les données de l'énoncé, l'arbre de probabilités est complété sur celui donné en annexe 1.

2. $G \cap N$ est l'évènement : « la personne est âgée de plus de 65 ans et est atteinte par une infection nosocomiale ».

Calculons sa probabilité. $p(G \cap N) = p(G) \times p_G(N)) = 0{,}53 \times 0{,}064 \approx 0{,}034$.

3. Calculons p(N).

$p(N) = p(E) \times p_E(N) + p(F) \times p_F(N) + p(G) \times p_G(N) = 0{,}06 \times 0{,}024 + 0{,}41 \times 0{,}037 + 0{,}034 \approx 0{,}050\,53$.

Une valeur approchée au millième de la probabilité de contracter une infection nosocomiale est 0,051.

4. Un lecteur de l'enquête affirme qu'un patient victime d'une infection nosocomiale a plus de trois chances sur quatre d'être une personne âgée de plus de 65 ans.

Calculons la probabilité d'avoir une infection nosocomiale sachant que la personne a plus de soixante cinq ans.

$p_N(G) = \dfrac{p(G \cap N)}{p(N)} = \dfrac{0{,}034}{0{,}051} \approx 0{,}667$.

Cette valeur étant inférieure à 0,75, le lecteur a tort.

Partie B

On suppose dans cette partie que la probabilité qu'un patient soit victime d'une infection nosocomiale est $p = 0{,}051$.

1. Dans cette question, on choisit au hasard 50 patients ayant participé à l'enquête.

On suppose que ce choix peut être assimilé à 50 tirages indépendants avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de patients infectés parmi les 50 personnes choisies.

a. On admet que X suit une loi binomiale. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}051$. Son espérance est np. $E(X) = 50 \times 0{,}051 = 2{,}55$.

b. La probabilité que, parmi les 50 personnes interrogées, trois soient atteintes par une infection nosocomiale est $p(X=3)$.

$p(X=3)=\begin{pmatrix}50\\3\end{pmatrix}\times 0{,}051^3\times(1-0{,}051)^{47}\approx 0{,}222.$

2. Dans un hôpital, 2 500 patients ont été hospitalisés lors du premier trimestre 2016.

Parmi ces patients, 188 ont été victimes d'une infection nosocomiale lors de leur passage dans cet hôpital. Le directeur de cet établissement trouve inquiétant ces résultats.

Déterminons un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du taux de patients infectés pour cet échantillon.

$\left[0{,}051-\dfrac{1}{\sqrt{2500}}\ ;\ 0{,}051+\dfrac{1}{\sqrt{2500}}\right]=[0{,}031\ ;\ 0{,}071]$

Les craintes du directeur sont fondées puisque la proportion $\dfrac{188}{2500}=0{,}0752$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Exercice 3 **6 points**

Le prix du gramme d'or a subi de 2010 à 2015 de fortes variations alors que la progression entre 2005 et 2009 avait été relativement régulière.

Un expert estime que l'on peut prévoir le prix du gramme d'or dans le futur en se basant sur l'évolution de celui-ci entre 2005 et 2009.

Le tableau suivant donne l'évolution du prix moyen annuel du gramme d'or entre 2005 et 2009.

Année	2005	2006	2007	2008	2009
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4
Prix moyen annuel y_i du gramme d'or (en euro)	11,61	15,38	16,18	19,24	22,33

Source : INSEE

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté dans le repère donné en annexe 2.

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite qui réalise un ajustement affine du nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au centième est $y=2{,}53x+11{,}89$.

2. Pour simplifier les calculs, on choisit de réaliser cet ajustement affine avec la droite D d'équation :

$y=2{,}5x+11{,}9$.

a. Cette droite D est tracée dans le repère donné en annexe 2.

b. Suivant ce modèle d'ajustement, calculons le prix du gramme d'or prévisible en 2015.

En 2015, $x=10$, en remplaçant x par cette valeur dans l'équation de la droite, nous obtenons :

$y=2{,}5\times 10+11{,}9=36{,}9$.

La vérification de ce résultat est indiquée sur le graphique.

c. Déterminons l'année à partir de laquelle le prix du gramme d'or dépassera 50 euros selon ce modèle. Pour ce faire, résolvons $2{,}5x+11{,}9>50$.

$2{,}5x+11{,}9>50$; $2{,}5x>50-11{,}9$; $2{,}5x>38{,}1$; $x>\dfrac{38{,}1}{2{,}5}$; $x>15{,}24$.

En considérant le modèle encore valable, nous pouvons estimer que le prix du gramme d'or dépassera les cinquante euros en 2021.

3. Un autre expert propose un ajustement défini par l'équation $y=0{,}01x^2+2{,}3x+11$.

Selon le second modèle, le prix du gramme d'or serait de $0{,}01\times 10^2+2{,}3\times 10+11=35$

Sachant que le prix moyen annuel du gramme d'or en 2015 a été de 33,81 euros, le second ajustement a été le plus proche de la réalité en 2015 puisque 35 est plus proche de 33,81 que 36,9

Partie B

Un bijoutier souhaite lancer un nouveau modèle de bijou contenant de l'or.
On admet que le coût de production de ce bijou, exprimé en millier d'euros, est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x + 15$
où x représente le nombre de centaines de bijoux fabriqués.
On admet également que la recette, exprimée en millier d'euros, est modélisée par la fonction R définie par $R(x) = 15x$ où x représente le nombre de centaines de bijoux fabriqués et vendus.

Le nombre de bijoux fabriqués et vendus est compris entre 50 et 300 donc $x \in [0{,}5~;~3]$.

1. Montrons que la fonction bénéfice B est définie pour tout $x \in [0{,}5~;~3]$ par : $B(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 15$.

   Pour vérifier cela, calculons le bénéfice réalisé.

   $B(x) = R(x) - C(x) = 15x - (2x^3 - 3x^2 + 3x + 15) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 15$.

   Nous obtenons la même fonction.
2. Pour $x \in [0{,}5~;~3]$ $B'(x) = -2(3x^2) + 3(2x + 12 = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x^2 - x - 2)$, où B' désigne la fonction dérivée de B.
3. Étudions le signe de $B'(x)$ pour $x \in [0{,}5~;~3]$. Déterminons si elles existent,les racines du trinôme du second degré : $x^2 - x - 2$. $\Delta = (-1)^2 - 2 \times 1 \times -2) = 1 + 8 = 9$. Δ étant strictement positif, le trinôme admet deux racines.

   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{+1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1$ $\quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

   Il en résulte $B'(x) = -6(x+1)(x-2)$. Par conséquent $x \in [0{,}5~;~3]$, $B'(x)$ est du signe de $2 - x$.

   Sur $\mathbf{R}$, $2 - x > 0 \iff x < 2$.

   Si $x \in [0{,}5~;~2[$, $B'(x) > 0$ et si $x \in]2~;~3]$, $B'(x) < 0$.

   Étudions le sens de variation de B sur $[0{,}5 ; 3]$.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

   Sur $[0{,}5~;~2[$, $B'(x) > 0$ par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

   Sur $]2~;~3]$, $B'(x) < 0$ par conséquent B est strictement décroissante sur cet intervalle.

   Dressons maintenant le tableau de variation de B sur $[0{,}5~;~3]$

x	0,5		2		3
$B'(x)$		+	0	−	
Variation de B		↗	5	↘	
	−8,5				−6

4. B admet un maximum égal à 5 pour $x = 2$ par conséquent le nombre de bijoux fabriqués et vendus qui permet de réaliser un bénéfice maximal est 200.

Exercice 4 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM)

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 4]$ dont la courbe C est donnée ci-contre.

La droite T est tangente à la courbe C au point A de coordonnées $(3\ ;\ -5,5)$.

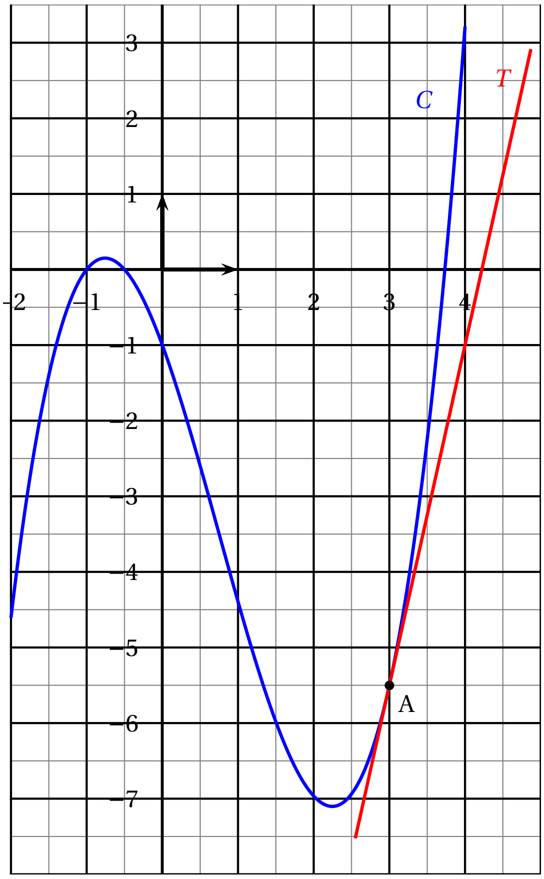
Une équation de T est :

a. $\cancel{y = 3x - 5,5}$

b. $\cancel{y = 4x - 16,5}$

c. $\boxed{y = 4,5x - 19}$

d. $\cancel{y = 19 - 4,5x}$



2. On suppose que (u_n) est une suite arithmétique de terme initial $u_1 = 5$ et de raison 1,8.

L'expression de u_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 est :

a. $\cancel{u_n = 5 + 1,8n}$

b. $\cancel{u_n = 5 \times 1,8^{n-1}}$

c. $\cancel{u_n = 4 + 1,8n}$

d. $\boxed{u_n = 3,2 + 1,8n}$

3. Une personne investit la somme de 1 000 euros au début de l'année 2017.
L'algorithme ci-dessous lui permet de calculer le capital disponible au début de l'année 2021.

```
Variables
        S, k
Initialisation
        Affecter à S la valeur 1 000
Traitement
        Pour k allant de 1 à 4
                Affecter à S la valeur 1,02 × S + 50
        FinPour
Sortie
        Afficher S
```

La valeur S affichée en sortie et arrondie à l'unité est :

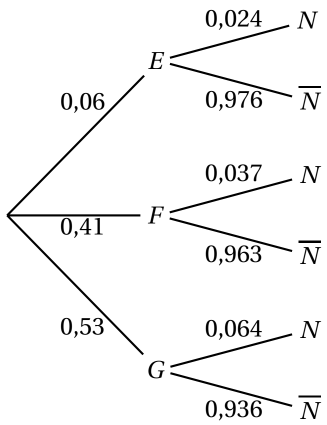
a. ~~1 200~~ **b.** $\boxed{1\,289}$ **c.** ~~1 214~~ **d.** ~~1082~~

4. On admet que la durée de sommeil quotidienne d'un adulte est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type σ inconnu.
On estime que la probabilité qu'un adulte dorme entre 6 heures et 10 heures est de 0,8.
La probabilité qu'un adulte dorme au plus 6 heures est :

a. ~~0,4~~ **b.** ~~0,8~~ **c.** $\boxed{0,1}$ **d.** ~~0,2~~

Annexes à rendre avec la copie

Exercice 2 Annexe 1



Exercice 3 Annexe 2

Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci.