Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S La Réunion juin 2004

Exercice 1 **4 points**

A - Lecture graphique

1. On lit graphiquement :
   - Si $k < 0$, l'équation n'a pas de solution ;
   - Si $k = 0$, l'équation a une solution (1) ;
   - Si $0 < k < 1$, l'équation a deux solutions ;
   - Si $k = 1$, l'équation a une solution (0) ;
   - Si $k > 1$, l'équation n'a pas de solution.
2. Pour $n > 1$, $0 < \dfrac{1}{n} < 1$. D'après la question précédente, l'équation

   $f(x) = k = \dfrac{1}{n}$ a alors deux solutions distinctes.

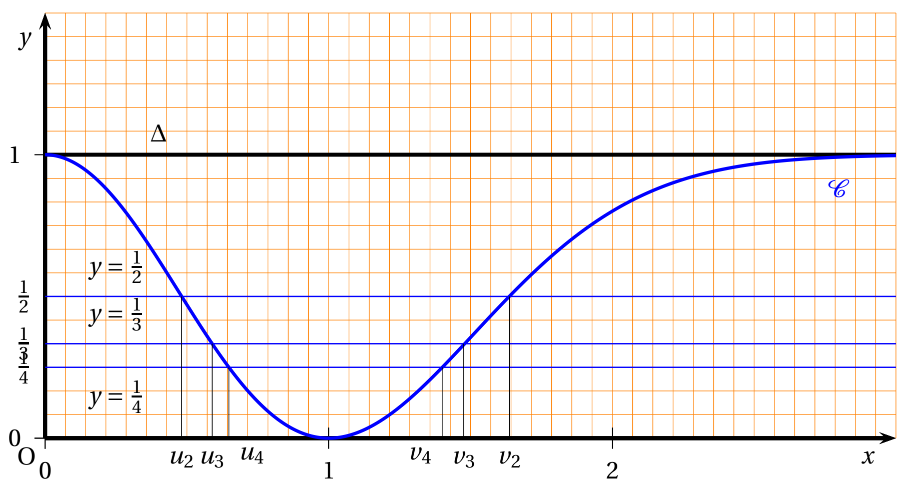
B - Définition et étude de deux suites

1. D'après le tableau de variations :
   - Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ la fonction f est continue et décroissante de $f(0) = 1$ à $f(1) = 0$.

     Or $n > 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n} < 1$ soit $f(1) < \dfrac{1}{n} < f(0)$.

     Il existe donc un réel unique u_n de $[0\ ;\ 1]$ tel que $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$.
   - Même raisonnement sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ avec f croissante de 0 à 1.

     Il existe un réel unique v_n de $[1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(v_n) = \dfrac{1}{n}$.
2. Construction de u_2, u_3, u_4, v_2, v_3, v_4.



Exercice 2 (Obligatoire) **5 points**

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}}$$

1. **a.** Image de B : $z_{\mathrm{B}'} = \dfrac{\mathrm{i} - 1 + 2}{1 + \mathrm{i} - \mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i} = z_{\mathrm{B}}$: B est invariant par f ;

   Image de C : $z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{\mathrm{i}(-1 + \mathrm{i}) + 2}{-1 + \mathrm{i} - \mathrm{i}} = -1 + \mathrm{i} = z_{\mathrm{C}}$: C est invariant par f.

   b. Soit M d'affixe différente de i et M' son image par f, alors :

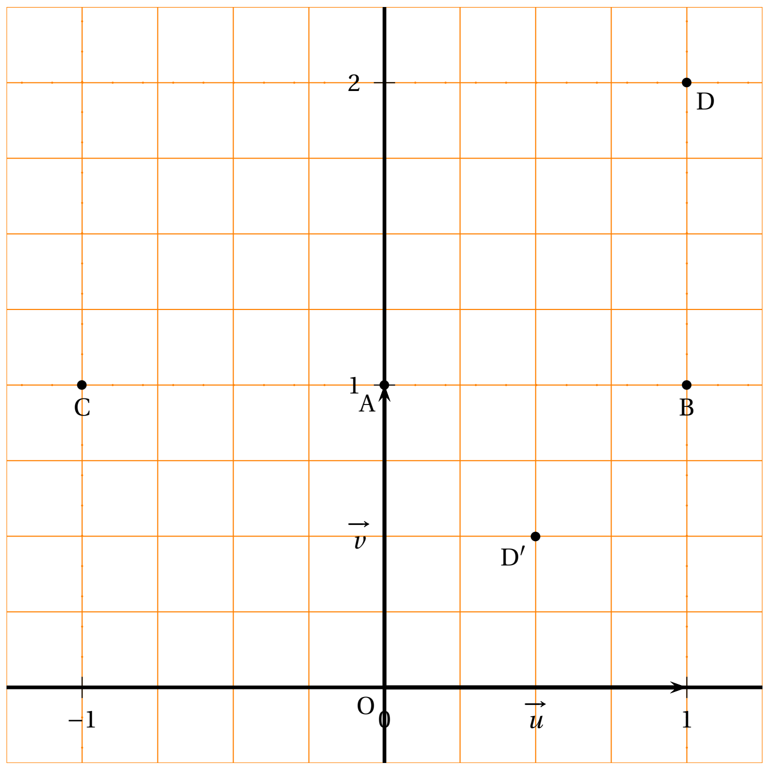
   $z' - \mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}} - \mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}z + 2 - \mathrm{i}z - 1}{z - \mathrm{i}}\ \dfrac{1}{z - \mathrm{i}}$, d'où $\left(z' - \mathrm{i}\right)(z - \mathrm{i}) = 1$.

c. Soit D′ l'image de D par f. On déduit de la question précédente que $\left(z_{D'} - \mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i} = 1$, ce qui signifie :

— en module que $\text{AD}' \times \text{OB} = 1$, soit $\text{AD}' = \dfrac{1}{\text{OB}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

— en argument que $\arg\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{AD}'}\right) + \arg\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = 0 \quad [2\pi]$ soit $\arg\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{AD}'}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, soit puisque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{AB}}$, $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}'}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.

On peut donc construire le symétrique de D autour de (AB), puis l'image de ce point dans l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. D'où la figure :



2. Soit un point M d'affixe z du cercle de centre A et de rayon $R > 0$, alors $\text{A}M = R$; or d'après la question 1. c., $\text{A}M' \times \text{A}M = 1 \iff \text{A}M' = \dfrac{1}{\text{A}M} = \dfrac{1}{R}$, ce qui signifie que l'image de M appartient au cercle centré en A et de rayon $\dfrac{1}{R}$.

Un point M du cercle a une affixe de la forme $z = \mathrm{i} + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, avec $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ et on a vu à la question précédente que son image a un argument égal à $-\alpha$, donc $0 \leqslant -\alpha < 2\pi$.

Conclusion : l'image d'un cercle centré en A et de rayon R est **le** cercle centré en A et de rayon $\dfrac{1}{R}$.

3. a. Si $z = \alpha\mathrm{i}$, $\alpha \neq 1$, alors $z' = \dfrac{-\alpha+2}{\alpha\mathrm{i}-\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(2-\alpha)}{1-\alpha} = \beta\mathrm{i}$. Donc z' est un imaginaire pur.

Donc l'image de l'axe imaginaire (privé de A) est inclus dans l'axe imaginaire pur.

Inversement si $z' = \alpha\mathrm{i}$, $\alpha \neq 1$, alors $z' = \alpha\mathrm{i} \iff z = \dfrac{2-\alpha}{1-\alpha}\mathrm{i}$.

Tout point de l'axe imaginaire différent de A a un antécédent sur cet axe imaginaire et différent de A.

Conclusion : l'image de l'axe imaginaire privé de A est l'axe imaginaire privé de A

b. Soit M un point de $\mathcal{D}$; si son abscisse est $\alpha(\alpha \neq 0)$, son affixe est $z = \alpha + \mathrm{i}$.

La relation trouvée au 1. b. s'écrit ici $\left(z' - \mathrm{i}\right)(\alpha) = 1 \iff z' = \dfrac{1}{\alpha} + \mathrm{i}$ qui montre que M'

appartient à la droite $\mathscr{D}$ privée de A puisque $\dfrac{1}{\alpha} \neq 0$.

De façon symétrique tout point M' de $\mathscr{D}$ a pour affixe : $z' = \alpha + \text{i}$. Toujours d'après la relation 1. b. on en déduit que $z = \dfrac{1}{\alpha} + \text{i}$ qui est un point de $\mathscr{D}$.

Conclusion : la droite $\mathscr{D}$ privée de A a pour image par f, la droite $\mathscr{D}$ privée de A.

EXERCICE 2 (spécialité) **5 points**

1. Soit p un entier premier impair.

a. D'après le petit théorème de Fermat, comme p impair est premier avec 2, on sait que $2^{p-1} - 1$ est divisible par p ou encore $2^{p-1} - 1 = \alpha p$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$, soit $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$.

b. Inversement soit $k \neq 0$ tel que $2^k \equiv 1 \quad [p] (1)$.

Si k divise n, il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $n = \alpha k$.

$(1) \Rightarrow \left(2^k\right)^\alpha \equiv 1^\alpha \quad [p] (1)$ ou $2^{k\alpha} \equiv 1 \quad [p]$ et finalement :

$$2^n \equiv 1 \quad [p]$$

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier différent de zéro vérifiant cette propriété.

La division euclidienne de n par b montre l'existence des entiers α et β tels que $n = \alpha b + \beta$, avec $\beta < b$.

Si $2^n \equiv 1 \quad [p]$, alors $2^{\alpha b + \beta} \equiv 1 \quad [p] \iff 2^{\alpha b} \times 2^\beta \equiv 1 \quad [p]$.

Or $2^b \equiv 1 \quad [p] \Rightarrow 2^{\alpha b} \equiv 1 \quad [p]$, donc $2^\beta \equiv 1 \quad [p]$, ce qui contredit l'hypothèse relative à b.

Donc $\beta = 0$ et par conséquent n est multiple de b ou encore b non nul divise n.

2. Soit q premier impair, $A = 2^q - 1$ et p un diviseur premier de A.

a. Puisque A est un multiple de p, on a $2^q - 1 \equiv 0 \quad [p] \iff 2^q \equiv 1 \quad [p]$.

b. p ne peut être pair, puisque le seul pair premier est 2 et A impair n'est pas multiple de 2.

c. Soit b le plus petit entier tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$ et q vérifie aussi $2^q \equiv 1 \quad [p]$. D'après le résultat de 1. c. on sait alors que b divise q ; mais q premier impair n'a pour diviseur que 1 et q :

— si $b = 1$ on aurait $2^1 \equiv 1 \quad [p]$ ce qui est faux car p est au moins égal à 3 ;

— donc $b = q$

d. p, premier impair est premier avec 2, donc le petit théorème de Fermat permet d'écrire : $2^{p-1} - 1 \equiv 0 \quad [p] \iff 2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$.

q étant le plus petit entier tel que $2^q \equiv 1 \quad [p]$, on en déduit que $q \leqslant p - 1$ et d'après le résultat de la question 1. c., q divise $p - 1$.

Or p impair implique que $p - 1$ est pair : il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $p - 1 = 2\alpha$.

Donc q divise 2α et d'après le théorème de Gauss comme q est impair donc premier avec 2, il divise α. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = kq$.

On a donc $p - 1 = 2kq = 2(kq) \iff p - 1 \equiv 0 \quad [2q]$ soit finalement

$p \equiv 1 \quad [2q]$.

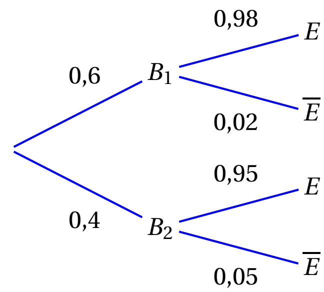
3. On a $\text{A}_1 = 2^{17} - 1$

D'après le résultat précédent 17 étant un impair premier, tout facteur premier p de A_1 vérifie $p \equiv 1 \quad [2 \times 17] \iff p \equiv 1 \quad [34] \iff p = 34\alpha + 1$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$.

Les entiers 103, 137, 239 et 307 sont les entiers premiers inférieurs à 400 de la forme $34\alpha + 1$; aucun d'eux ne divise A_1 et comme $400^2 > \text{A}_1$, on en déduit que A_1 est premier.

EXERCICE 3 **5 points**

Partie A

1. Les tirages étant avec remise, on a ici une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{120}{6000}$.
   On sait que la probabilité d'avoir exactement 3 adresses inexactes sur 10 tirages est :
   $$\binom{10}{3}\left(\frac{120}{6000}\right)^3\left(1-\frac{120}{6000}\right)^7$$
   Réponse c.
2. Avec des notations évidentes :
   

   Comme $p(E) \neq 0$, on a :
   $p_E(B_1) = \dfrac{p(B_1 \cap E)}{p(E)} = \dfrac{p(B_1 \cap E)}{p(B_1) \times p_{B_1}(E) + p(B_2) \times p_{B_2}(E)} = \dfrac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}$.
   Réponse d.

Partie B

1. La probabilité cherchée est : $1 - p([0\,;\,2500[) = 1 - \int_0^{2500} 0,0005\mathrm{e}^{-0,0005 \times x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0,0005x}\right]_0^{2500} =$ $1 - \mathrm{e}^{-0,0005 \times 2500} - 1 = \mathrm{e}^{-1,25} = \mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$.
   Réponse a.
2. • Toutes les fonctions étant continues et leurs dérivées continues, on peut intégrer par parties :
   $u = x \qquad \mathrm{d}v = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$
   $\mathrm{d}u = 1 \qquad v = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$
   Donc $\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t =$
   $-t\mathrm{e}^{-\lambda t} + \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}$.
   Réponse b.
   • Limite de l'intégrale précédente.
   Comme $\lambda > 0$, on a :
   — $\lim\limits_{t \to +\infty} t\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$;
   — $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda} = 2000$.
   Réponse b.

EXERCICE 4 — 6 points

1. **a.** On a $[f(x)]^2 \geqslant 0 \Rightarrow 1 + [f(x)]^2 \geqslant 1 \Rightarrow [f'(x)]^2 > 0$.
   Conclusion : quel que soit x, $f'(x) \neq 0$.
   b. La première relation appliquée à $x = 0$ donne $[f(0)]^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
2. En dérivant la relation (1) :
   $2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0 \iff (\text{car } f'(x) \neq 0)\, f''(x) - f(x) = 0 \quad (4)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
3. $u = f + f'$ et $v = f' - f$.

a. $u(0) = f(0) + f'(0) = 0 + 1 = 1$
$v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$.

b. f' étant dérivable, u et v le sont aussi :
$u' = f'' + f' = f + f' = u$ et $v' = f'' - f' = f - f' = -v$.

c. On en déduit que $u = K_1\mathrm{e}^{x}$ et que $v = K_2\mathrm{e}^{-x}$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

d. On a $u - v = f' + f - f' - (-f) = 2f \Rightarrow f = \dfrac{u-v}{2}$.
Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

4. a. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Inversement comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. f somme de fonctions dérivables est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$ car $\mathrm{e}^{u} > 0$ quel que soit u. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

5. a. D'après le tableau de variations précédent, la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$ a une solution unique α.

b. Application : résolution de l'équation $f(x) = 3$.
On a $f(x) = 3 \iff \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = 3 \iff \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 6 \iff \mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} - 6 = 0 \iff [\mathrm{e}^{x}]^2 - 6\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \iff (\mathrm{e}^{x} - 3)^2 - 9 - 1 = 0 \iff (\mathrm{e}^{x} - 3)^2 - 10 = 0 \iff \left(\mathrm{e}^{x} - 3 + \sqrt{10}\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 3 - \sqrt{10}\right) = 0 \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{x} - 3 - \sqrt{10} & = & 0 \\ \mathrm{e}^{x} - 3 + \sqrt{10} & = & 0 \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{x} & = & 3 + \sqrt{10} \\ \mathrm{e}^{x} & = & 3 - \sqrt{10} \end{array}\right.$

La deuxième équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $3 - \sqrt{10} < 0$.
La première implique en appliquant la fonction logarithme népérien : $x = \ln\left(3 + \sqrt{10}\right)$.
Une calculatrice donne : $\alpha \approx 1{,}82$ à 10^{-2} près.