Correction du baccalauréat S La Réunion juin 2003

EXERCICE 1 **6 points**

Commun tous les candidats

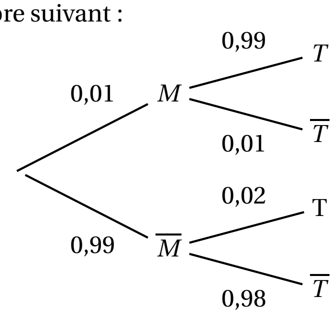
1. **a.** La probabilité à chaque tirage de tirer une boule blanche est $\dfrac{75}{75+25} = \dfrac{75}{100} = \dfrac{25\times 3}{25\times 4} = \dfrac{3}{4}$. Fausse

   b. On a une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{3}{4}$, donc
   $\text{P}(X=0) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{\left(2^2\right)^n} = \dfrac{1}{2^{2n}}$. Vraie

   c. $\text{P}(X<5) = 1 - \text{P}(X \geqslant 5)$. Fausse

   d. On a $\text{E}(X) = n \times p = \dfrac{3}{4} \times n = 0,75n$. Vraie

2. **a.** On peut dresser l'arbre suivant :



   On a $\text{P}_M(T) + \text{P}_{\overline{M}}(T) = 0,99 + 0,02 = 1,01$. Vraie

   b. On a d'après la formule des probabilités totales :
   $\text{P}_M(T)\text{P}(M) + \text{P}_{\overline{M}}(T)\text{P}\left(\overline{M}\right) = \text{P}(T)$. Fausse

   c. D'après la formule précédente :
   $\text{P}(T) = 0,99 \times 0,01 + 0,02 \times 0,99 = 0,99 \times 0,03 = 0,0297 = 2,97 \cdot 10^{-2}$. Vraie

   d. On a $\text{P}_T\left(\overline{M}\right) = \dfrac{\text{P}\left(T \cap \overline{M}\right)}{P(T)} = \dfrac{0,02 \times 0,99}{0,0297} = \dfrac{2}{3}$. Vraie

3. **a.** La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = 0,01\text{e}^{-0,01t}$. Fausse

   b. On a $\text{P}(Y \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t 0,01\text{e}^{-0,01x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-0,01x}\right]_0^t = 1 - \text{e}^{-0,01t}$. Vraie

   c. La probabilité d'attendre moins de 160 secondes est :
   $\text{P}(Y \leqslant 180) = 1 - \text{e}^{-0,01\times 180} = 1 - \text{e}^{-1,8} \approx 0,83$. Fausse

   d. On a $\text{P}(Y \leqslant 60) = 1 - \text{e}^{-0,01\times 60} = 1 - \text{e}^{-0,6} \approx 0,45$.
   Donc $\text{P}(Y > 60) = 1 - \text{P}(Y \leqslant 60) \approx 0,55$. Vraie

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $V_{\text{ABD}M} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}(\text{ABD}) \times \text{A}M = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} 1 \times 1 \times \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{6a}$.

2. **a.** On a par définition du barycentre :
   $a^2\overrightarrow{KM} + 1\overrightarrow{K\text{B}} + 1\overrightarrow{K\text{D}} = \overrightarrow{0} \iff a^2\overrightarrow{K\text{B}} + a^2\overrightarrow{\text{B}M} + \overrightarrow{K\text{B}} + \overrightarrow{K\text{B}} + \overrightarrow{\text{BD}} = \overrightarrow{0} \iff$
   $\left(a^2+2\right)\overrightarrow{K\text{B}} + a^2\overrightarrow{\text{B}M} + \overrightarrow{\text{BD}} = \overrightarrow{0} \iff \left(a^2+2\right)\overrightarrow{\text{B}K} = a^2\overrightarrow{\text{B}M} + \overrightarrow{\text{BD}} \iff$
   $\overrightarrow{\text{B}K} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{\text{B}M} + \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{\text{BD}}$.

b. • $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} + \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}\right) \cdot \overrightarrow{AM} =$

$\dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} + \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}$ (car $\overrightarrow{AM}$ est normal au plan (ABCD) donc orthogonal à tout vecteur de ce plan).

Or $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a^2}$, donc finalement :

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a^2+2}$.

• $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} + \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{a^2+2}$ (car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux).

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BK} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = -\dfrac{1}{a^2+2} + \dfrac{1}{a^2+2} = 0$.

c. De la même façon qu'au **a.** et **b.** on calcule :

$\overrightarrow{DK} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{DM} + \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{DB}$.

Donc $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AM} + \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{a^2}{a^2+2} \times \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{a^2+2}$ et

$\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{a^2+2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{a^2+2}$.

D'où $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{a^2+2} + \dfrac{1}{a^2+2} = 0$.

d. Puisque K est barycentre des points M, B et D il appartient au plan MBD. Les deux questions précédentes ont montré que (BK) est perpendiculaire à (MD) et que (DK) est perpendiculaire à (MB). Ces droites sont donc deux hauteurs du triangle(MBD), donc K est le l'orthocentre du triangle BDM.

3. $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}\right) \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB}$; or la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABE) donc en particulier à (MB) et par conséquent $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$; de plus dans la question /textbf2. on a vu que $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Conclusion : $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

De la même façon : $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0 + 0 = 0$.

Conclusion : la droite (AK) orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDM) est orthogonale à ce plan.

4. a. Dans le triangle BDM rectangle en D le théorème de Pythagore s'écrit :

$BM^2 = MA^2 + AB^2 = \dfrac{1}{a^2} + 1 = \dfrac{1+a^2}{a^2}$;

Dans le triangle ADM rectangle en A le théorème de Pythagore s'écrit :

$DM^2 = MA^2 + AD^2 = \dfrac{1}{a^2} + 1 = \dfrac{1+a^2}{a^2}$; conclusion : $MB = MD = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$, le triangle BD$M$ est isocèle en M.

Le triangle BDM est isocèle donc si O est le milieu de [BD], [MO] est médiane, médiatrice et hauteur de ce triangle, dont l'aire est égale à $\dfrac{1}{2} \times MO \times BD$.

On a $BD = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Dans le triangle MOB rectangle en O, le théorème de Pythagore donne :

$MB^2 = MO^2 + OB^2 \iff MO^2 = MB^2 - OB^2 = \dfrac{1+a^2}{a^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a^2+2-a^2}{2a^2} = \dfrac{a^2+2}{2a^2}$. Donc :

$MO = \dfrac{\sqrt{a^2+2}}{a\sqrt{2}}$.

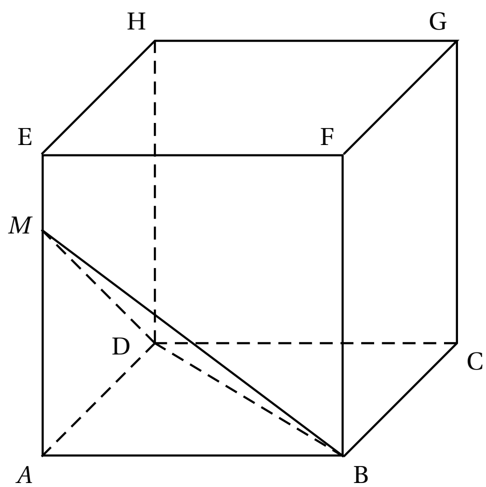
L'aire du triangle est donc égale à :

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{a^2+2}}{a\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$.

b. Il faut donc résoudre : $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a} = 1 \iff \dfrac{a^2+2}{4a^2} = 1 \iff a^2+2 = 4a^2 \iff$ $3a^2 = 2 \iff a^2 = \dfrac{2}{3} \iff a = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

On a vu que le volume du tétraèdre ABDM est égale à $\dfrac{1}{6a}$ et on a démontré que (AK) est perpendiculaire au plan BDM ; c'est donc une hauteur du tétraèdre ABDM dont le volume est : $\dfrac{1}{3} \times \text{A}K \times \text{aire}(\text{BD}M)$; on a donc :

$\dfrac{1}{6a} = \text{A}K \times 1 \iff \text{A}K = \dfrac{1}{6a} = \dfrac{1}{6\sqrt{\dfrac{2}{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. L'écriture complexe de la transformation est de la forme $z' = az + b$, avec a et b complexes et $a \notin 0$: c'est donc une similitude directe.

   L'affixe de son point invariant vérifie :

   $z = -\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)z - 1 + \text{i}\left(1+\sqrt{3}\right) \iff z\left(1+\sqrt{3}+\text{i}\right) = -1 + \text{i}\left(1+\sqrt{3}\right) \iff z = \dfrac{-1+\text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}+\text{i}} =$

   $\dfrac{\left(-1+\text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(1+\sqrt{3}-\text{i}\right)}{\left(1+\sqrt{3}-\text{i}\right)\left(1+\sqrt{3}+\text{i}\right)} =$

   $\dfrac{-1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+\text{i}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+1} = \dfrac{\text{i}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+1} = \text{i}$

   (car $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$).

   Le point Ω d'affixe i est donc invariant par f.

   Il est bien sûr plus facile de vérifier que l'image de i est i.

   Le rapport de la transformation est $|a| = \left[\sqrt{3}+\text{i}\right| = \sqrt{3+1} = 2$.

   On a donc $a = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi}{6}}$.

L'angle de f est donc $\frac{7\pi}{6}$.

2. L'affixe de $\overrightarrow{\Omega M_0}$ est $z_0 - \text{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\text{i} - \text{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}\text{i}$.

Donc $\Omega M_0 = |z_0 - \text{i}| = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}\text{i}\right| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{1}{2}$.

On a donc $z_0 - \text{i} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{6}}$.

Donc $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M_0}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

3.

a. Voir la figure à la fin.

b. • *Initialisation* on a bien $z_0 - \text{i} = 2^0\text{e}^{\text{i}\frac{7\times 0\times\pi}{6}}(z_0 - \text{i}) = z_0 - \text{i}$.

• *Hérédité* Soit un naturel $n > 0$ tel que :

$z_n - \text{i} = 2^n\text{e}^{\text{i}\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - \text{i})$.

Donc $z_{n+1} = 2^{\text{i}\frac{7\pi}{6}}z_n - 1 + \text{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

Or le point Ω est invariant par f, son affixe vérifie donc :

$\text{i} = 2^{\text{i}\frac{7\pi}{6}}\text{i} - 1 + \text{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

En soustrayant ces deux dernières égalités, on obtient :

$z_{n+1} - \text{i} = 2^{\text{i}\frac{7\pi}{6}}(z_n - \text{i})$.

Cette égalité signifie que la suite $(z_n - \text{i})$ est une suite géométrique de raison $2^{\text{i}\frac{7\pi}{6}}$.

On sait alors que : $z_{n+1} - \text{i} = \left(2^{\text{i}\frac{7\pi}{6}}\right)^{n+1}(z_0 - \text{i}) = 2^{n+1}\text{e}^{\text{i}\frac{7\pi(n+1)}{6}}(z_0 - \text{i})$.

La relation est vraie au rang $n + 1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence : pour tout entier naturel n, :

$$z_n - \text{i} = 2^n\text{e}^{\text{i}\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - \text{i}).$$

c. Pour tout entier naturel n, $\Omega M_n = |z_n - \text{i}| = 2^n|z_0 - \text{i}|\ v = 2^n \times \dfrac{1}{2} = 2^{n-1}$.

D'où $\Omega M_n \geqslant 10^2 \iff 2^{n-1} \geqslant 10^2 \iff (n-1)\ln 2 \geqslant 2\ln 10 \iff$
$n - 1 \geqslant \dfrac{2\ln 10}{\ln 2}$ (car $\ln 2 > 0$).

Or $\dfrac{2\ln 10}{\ln 2} \approx 6,6$. Conclusion il faut prendre $n \geqslant 8$.

4. a. On a $7 \times (-5) - 12 \times (-3) = -35 + 36 = 1$: le couple $(-5\ ;\ -3)$ est solution de l'équation.

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 7x - 12y & = & 1 \\ 7 \times (-5) - 12 \times (-3) & = & 1 \end{array}\right.$$

d'où par différence : $7(x+5) - 12(y+3) = 0 \quad (1) \iff 7(x+5) = 12(y+3)$.

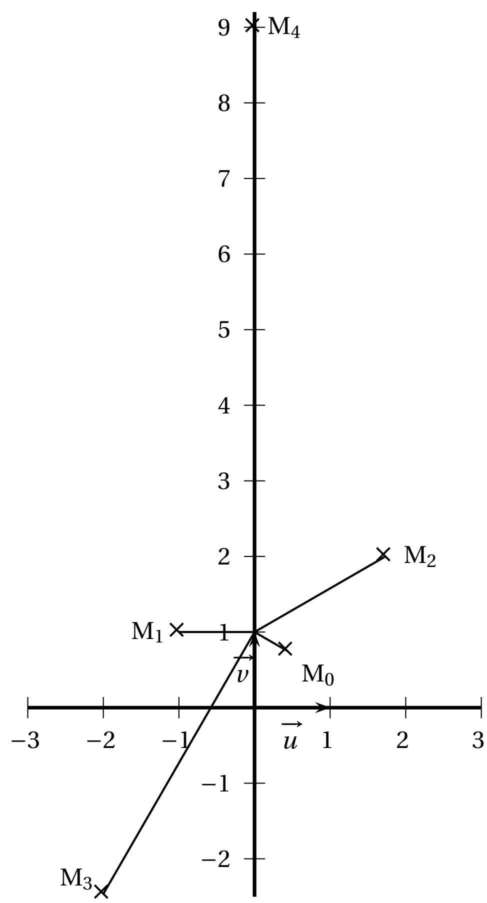
Or 7 divise $12(y+3)$, mais est premier avec 12 : il divise donc $y+3$; il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y + 3 = 7k$ et en remplaçant dans l'égalité (1),

$7(x+5) - 12 \times 7k = 0 \iff x + 5 - 12k = 0 \iff x = -5 + 12k$ et $y = -3 + 7k$.

Réciproquement $7(-5+12k) - 12(-3+7k) = -35+84k+36-84k = 1$, donc les couples de la forme $(-5+12k\ ;\ -3+7k)$, $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de l'équation.

L'ensemble des couples solutions de l'équation (E) est donc l'ensemble de tous les couples $(-5+12k\ ;\ -3+7k)$, $k \in \mathbb{Z}$

b. Les points M de Δ ont pour affixe $z = x + \text{i}$, avec $x \geqslant 0$.
Δ est donc la demi-droite d'origine le point de coordonnées $(0;1)$ c'est-à-dire Ω et contenue dans la droite horizontale d'équation $y = 1$. Voir la figure
$M_n \in \Delta \iff z_n = x_n + \text{i}$ avec $x_n \geqslant 0$.
On a vu à la question **3.** que
$z_n - \text{i} = 2^n \text{e}^{\text{i}\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - \text{i})$, soit avec $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\text{i} = \dfrac{1}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$,
$z_n = \text{i} + 2^n \text{e}^{\text{i}\frac{7n\pi}{6}} \times \dfrac{1}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = \text{i} + 2^{n-1}\text{e}^{\text{i}\frac{(7n-1)\pi}{6}} = 2^{n-1}\cos\frac{(7n-1)\pi}{6} + \text{i}\left(1 + 2^{n-1}\sin\frac{(7n-1)\pi}{6}\right)$.
Il faut donc que la partie imaginaire soit égale à 1, donc
$1 + 2^{n-1}\sin\frac{(7n-1)\pi}{6} = 1 \iff 2^{n-1}\sin\frac{(7n-1)\pi}{6} = 0 \iff \sin\frac{(7n-1)\pi}{6} = 0 \iff$
$\frac{(7n-1)\pi}{6} = 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), soit
$\frac{(7n-1)}{6} = 2k \iff 7n - 1 = 12k \iff 7n = 12k + 1 \iff 7n - 12k = 1$.
Or d'après la question précédente n doit être de la forme $n = -5 + 12p$, avec $p \in \mathbb{Z}$.
On a bien puisque $\sin\frac{(7n-1)\pi}{6} = 0$ et que $\cos\frac{(7n-1)\pi}{6} \geqslant 0$, $\cos\frac{(7n-1)\pi}{6} = 1$ et on retrouve la même condition $n = -5 + 12p$, avec $p \in \mathbb{Z}$.
La plus petite valeur de n est obtenue pour $p = 1$, d'où $n = 7$.



PROBLÈME **9 points**
Commun à tous les candidats.

1. **a.** La fonction u quotient de fonctions dérivables et le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : :

$u'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

On a u est solution de (E) si et seulement si :

$u - u' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \iff \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \iff \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(x-1)}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ qui est vraie.

b. Quel que soit $x > 0$, $(v-u)(x) - (v-u)'(x) = v(x) - u(x) - v'(x) + u'(x) = v(x) - v'(x) - \left[u(x) - u'(x)\right] = v(x) - v'(x) - \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$.

La fonction v est solution de (E) si, et seulement si pour x réel supérieur à zéro,

$v(x) - v'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \iff v(x) - v'(x) - \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = 0$, soit d'après le calcul précédent $(v-u)(x) - (v-u)'(x) = 0$, c'est-à-dire si $v - u$ est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

c. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y - y' = 0$ sont les fonctions $x \longmapsto K\mathrm{e}^x$, avec $K \in \mathbb{R}$.

v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est de la forme précédente, soit :

$v(x) = u(x) + K\mathrm{e}^x = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{1+Kx}{x}\right)$ avec $K \in \mathbb{R}$ et x réel supérieur à zéro..

2. a.
- Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx+1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x) = +\infty$.
-

— Si $k < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{kx+1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où par produit des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = -\infty$.

— Si $k = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. (croissances comparées)

b. $f_k(x)$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f_k'(x) = \dfrac{kx - 1 - kx}{x^2} \times \mathrm{e}^x + \dfrac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{kx+1}{x}\right) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{-1 + x + kx^2}{x^2}\right)$.

- Si $k = 0$, $f_k'(x) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{-1+x}{x^2}\right)$, donc la dérivée s'annule en changeant de signe en 1.
- Si $k < 0$, comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f_k'(x)$ est celui du trinôme $-1 + x + kx^2$, donc le discriminant est $\Delta = 1 + 4k$; d'où les cas :

  — Si $k < -\frac{1}{4}$, alors $\Delta < 0$ et la dérivée ne s'annule pas et est négative ;

  — Si $k = -\frac{1}{4}$, alors $\Delta = 0$, la dérivée s'annule en $-\dfrac{1}{2k}$ et est négative ailleurs ;

  — Si $k > -\frac{1}{4}$, alors $\Delta > 0$ et la dérivée s'annule en :

  $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{1+4k}}{2k}$ qui est positif car quotient de deux nombres négatifs et

  $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1+4k}}{2k}$.

  Le produit des racines est $x_1 x_2 = \dfrac{1 - (1+4k)}{4k^2} = \dfrac{-4k}{4k^2} = -\dfrac{1}{k}$.

  Donc si $-\frac{1}{4} < k < 0$, le produit des racines est positif; comme $x_1 > 0$, alors $x_2 > 0$.

  Si $k > 0$, le produit des racines est négatif; comme x_1 est positif, x_2 est négatif.

  Dans tous les cas la dérivée s'annule deux fois, elle est positive si $x \in [x_1~;~x_2]$ ou $[x_2~;~x_1]$ et est négative ailleurs.

3. • La première courbe (1) est $\mathscr{C}_0$: c'est la seule croissante pour x assez grand;

• La courbe (2) est $\mathscr{C}_{-0,15}$ car la dérivée s'annule deux fois et $-0,15$ est le seul à être supérieure à $-0,25$.

• La courbe (3) est $\mathscr{C}_{-1}$ car c'est la seule fonction strictement décroissante.

• La courbe (4) est $\mathscr{C}_{-0,25}$ car la fonction est décroissante et la dérivée s'annule comme on l'a vu ci-dessus une seule fois en 2.

4. **a.** On sait que la fonction $x \longmapsto g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ quotient de deux fonctions positives est positive, donc l'intégrale représente l'aire (en unités d'aire) de la surface limitée par la représentation graphique de la fonction g, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = a+1$.

b. La fonction $\mathscr{A}$ est dérivable comme différence de deux fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et :

$\mathscr{A}'(a) = F'(a+1)-F'(a) = u(a+1)-u(a) = \dfrac{\mathrm{e}^{a+1}}{a+1}-\dfrac{\mathrm{e}^a}{a} = \dfrac{a\mathrm{e}^{a+1}-(a+1)\mathrm{e}^a}{a(a+1)} = \dfrac{a\mathrm{e}^a\mathrm{e}-(a+1)\mathrm{e}^a}{a(a+1)} = \dfrac{\mathrm{e}^a[a(\mathrm{e}-1)-1}{a(a+1)}$.

Comme e^a, a, $a+1$ sont des nombres positifs le signe de $\mathscr{A}'(a)$ est celui de $a(\mathrm{e}-1)$, d'où :

- si $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$, alors $\mathscr{A}'(a) = 0$;
- si $a > \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$, alors $\mathscr{A}'(a) > 0$;
- si $a < \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$, alors $\mathscr{A}'(a) < 0$

Conclusion : la fonction $\mathscr{A}$ est décroissante sur $\left]0~;~\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\right[$, et croissante sur $\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}~;~+\infty\right[$.

Elle a donc un minimum pour $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.

c. On reconnait $\mathscr{A}(a)$ car $\mathscr{C}_0 = g$.

Or le minimum de cette aire est obtenue pour $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$. Or $a+1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1} + 1 = \dfrac{1+\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

On découpe donc une bande limitée par les deux droites verticales d'équations

$x = a = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ et $x = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$. (voir plus bas)

Annexe du problème