Durée : 4 heures

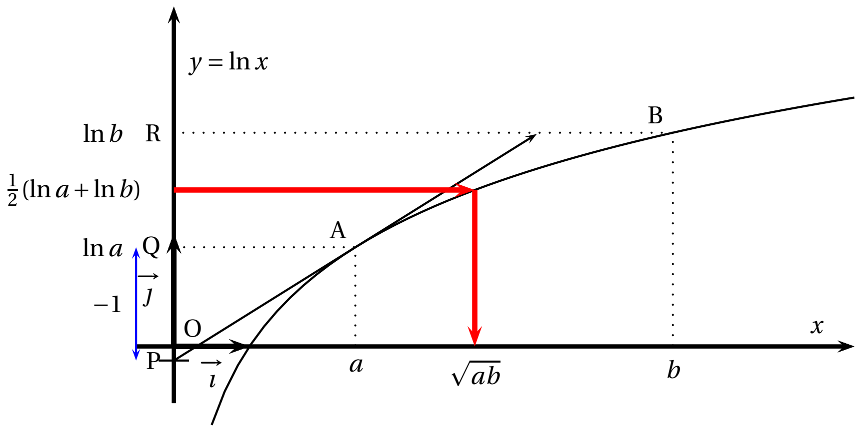
Corrigé du baccalauréat S La Réunion juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $A(a\,;\,\ln a).M(x\,;\,y)(\neq A)\in(T)\iff \dfrac{y-\ln a}{x-a}=\dfrac{1}{a}\iff y=\dfrac{x}{a}-1+\ln a$.

   b. $P(0\,;\,y)\in(T)\iff y=-1+\ln a$.
   $P(0\,;\,\ln a-1)$.
   Longueur PQ : On a $Q(0\,;\,\ln a)$.
   $PQ^2=(0-0)^2+(\ln a-\ln a+1)^2=1$.
   Donc $PQ=1$.



   La construction simple de la tangente : on construit P en enlevant 1 à l'ordonnée de Q : la tangente est la droite (PA).

2. R. O. C. : en appliquant la propriété à $\ln m=\ln\left(\sqrt{m}\times\sqrt{m}\right)$, on obtient :
   $\ln m=\ln\sqrt{m}+\ln\sqrt{m}=2\ln\sqrt{m}\iff \ln\sqrt{m}=\dfrac{1}{2}\ln m$ (avec $m>0$).

3. On a $\ln a+\ln b=\ln ab=2\ln\sqrt{ab}\iff \ln\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(\ln a+\ln b)$.
   D'où la construction :
   — On construit la médiatrice de [QR].
   — Cette médiatrice coupe Γ en un point dont l'abscisse est $\ln\sqrt{ab}$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. $u_{n+1}-u_n=u_n^2\geqslant 0$: la suite est donc croissante.

2. **a.** $h(x)=x^2+x$; h est dérivable et $h'(x)=2x+1$.
   Sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$, $h'(x)<0\Rightarrow h$ est décroissante ;
   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $h'(x)>0\Rightarrow h$ est croissante.
   $h'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$. La fonction admet en ce point un extremum qui est un minimum $h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$.
   Sur $\left]-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$ la fonction décroit de 0 à $-\dfrac{1}{4}$ et sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right[$, la fonction croit de $-\dfrac{1}{4}$ à 0.

Conclusion : si $x \in]-1~;~0[$, alors $-1 < -\dfrac{1}{4} < h(x) < 0$.

b. Par récurrence :

— *Initialisation* : on a $-1 < a = u_0 < 0$. L'encadrement est vrai au rang 0.

— *Hérédité* : soit un naturel n et supposons que $-1 < u_n < 0$.
D'après la question précédente si $u_n \in [-1~;~0[$, alors $u_{n+1} = h(u_n)$ appartient elle aussi à cet intervalle. L'encadrement est vrai au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il est vrai au rang $n+1$: on a montré par le principe de la récurrence que pour tout naturel n, $-1 < u_n < 0$.

3. La suite u est croissante et majorée par 0 : elle est donc convergente et sa limite ℓ est telle que $\ell \leqslant 0$.

Or la fonction h, dérivable est continue : la relation $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ donne à la limite $\ell = \ell^2 + \ell \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3 — 6 points

1. a. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$. Donc comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1$, on a finalement $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b. $x\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1 + 1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = f(x)$.

On en déduit car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = 0$, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ (à la calculatrice) .

On peut également rappeler que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x - 0} = \left(\mathrm{e}^x\right)'_{x\to 0} = e^0 = 1$.

Le quotient inverse $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ a lui aussi la même limite en 0 ; donc la limite de f est celle de e^x soit 1.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 1$: la fonction f est continue en 0.

3. a. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. Cette fonction est dérivable et $k'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ qui s'annule pour $x = 0$.

Cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ de $+\infty$ à $k(0) = 0$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$ de 0 à $+\infty$.

Donc $k(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$

b. Dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x - 1) - x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - x - 1)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

La fonction g est donc la fonction k qui ne s'annule que pour $x = 0$. Donc $f'(x)$ est composé de termes positifs pour $x \neq 0$

Conclusion : pour $x \neq 0$, $f'(x) > 0$. La fonction est croissante sur $]-\infty~;~0[$ et sur $]0~;~+\infty[$. D'où le

c. Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$

4. a. $f(-x) = \dfrac{-x\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}-1} = \dfrac{-x}{1-\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}$.

   Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont $\begin{pmatrix} -x-x \\ f(-x)-f(x) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -2x \\ \dfrac{x-x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1} \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} -2x \\ -x \end{pmatrix}$.

   Le coefficient de la droite (MM') est donc $\dfrac{-x}{-2x} = \dfrac{1}{2}$. (pour $x \neq 0$)

   b. Quand x tend vers 0 le coefficient directeur de la droite (MM') reste constant égal à $\dfrac{1}{2}$. Cette droite a pour limite la tangente à la courbe représentative de f au point O.

   Comme on admet que f est dérivable en 0, ceci montre que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement obligatoire

1. a. $b = \sqrt{3} - 3\mathrm{i}$.

   On a $|b|^2 = 3 + 9 = 12 = (2\sqrt{3})^2$. Donc $|b| = 2\sqrt{3}$.

   b peut donc s'écrire $b = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   b. On a aussi $|a| = 2\sqrt{3}$. Donc B appartient au cercle de centre O et de rayon [OA]. Si A$'$ est le symétrique de A autour de O, il suffit de construire la médiatrice de [OA$'$] qui coupe le cercle au point B (point du cercle de partie imaginaire positive).

2. a. Par définition $\overrightarrow{\mathrm{EA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{EC}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \iff$

   $x_{\mathrm{E}} = \dfrac{1}{4} \times (-\sqrt{3})$ et $y_{\mathrm{E}} = \dfrac{1}{4} \times 6$.

   Conclusion $\mathrm{E}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$. l'affixe de E est donc $e = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

   b. Par définition $2\overrightarrow{\mathrm{FA}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$. Donc $\mathrm{F}(-\sqrt{3}\ ;\ -1)$.

   L'affixe de F est $f = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

3. a. Calcul de $\dfrac{e-c}{e-b} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} - 2\mathrm{i}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} - \sqrt{3} + 3\mathrm{i}} = \dfrac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{-3\sqrt{3}-3\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{-3\sqrt{3}+9\mathrm{i}} = \dfrac{3+3\mathrm{i}\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{3\times 12} =$ $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\mathrm{i}$ qui est bien un imaginaire pur.

   L'égalité $\dfrac{e-c}{e-b} = k\mathrm{i}$ entraîne en prenant les arguments : $\left(\overrightarrow{\mathrm{BE}},\ \overrightarrow{\mathrm{CE}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

Ceci montre que la droite (BE) est perpendiculaire à la droite (CE). Mais E barycentre des points A et C appartient à la droite (AC) ; donc E est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle (ABC).

b. On a de même $\dfrac{f-c}{f-b} = \dfrac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}-2\mathrm{i}}{-\sqrt{3}-\mathrm{i}-\sqrt{3}+3\mathrm{i}} = \ldots = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

En prenant les arguments des deux membres on montre ainsi que les droites (BF) et (CF) sont perpendiculaires et comme F barycentre de A et B appartient à la droite (AB), F est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle (ABC).

4. On peut écrire que H est le barycentre de {(F ; 3) ; (C ; 6)} en utilisant l'associativité du barycentre, donc H appartient à la droite (CF).

De même comme le barycentre du système {A ; 2) ; (C ; 6)} est aussi le barycentre du système {A ; 1) ; (C ; 3)}, on déduit toujours d'après l'associativité du barycentre que H est le barycentre du système {A ; 1) ; (C ; 3) ; (B ; 1)} soit le barycentre du système {E ; 3) ; (B ; 1)}. Donc H appartient à la droite (BE).

Finalement H appartient à deux hauteurs du triangle (ABC) : c'est donc l'orthocentre du triangle du triangle (ABC) (et donc par conséquence la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC)).

EXERCICE 4 — 5 points

Enseignement de spécialité

1. a. Voir le corrigé ci-dessus.

b. Voir le corrigé ci-dessus.

c. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$, dont le carré du module est $9\times 3+9 = 36 = 6^2$.

Cette affixe peut donc s'écrire : $3\sqrt{3}-3\mathrm{i} = 6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Conclusion $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

De même L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est $2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$ dont le carré du module est égal à $16 = 4^2$.

Cette affixe peut donc s'écrire $2\sqrt{3}+2\mathrm{i} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Conclusion $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2. a. Coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, les vecteurs sont colinéaires, donc A, E et C sont alignés.

De même $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\ -3\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ ce qui montre que les points A, F et B sont alignés.

b. Voir le sujet obligatoire

c. Voir la figure

3. $z \longmapsto z' = \dfrac{1}{2}\overline{z} - \sqrt{3}$.

Image de A : $z_{\mathrm{A'}} = \dfrac{1}{2}\times\left(-2\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} = z_{\mathrm{A}}$.

Image de B : $z_{\mathrm{B'}} = \dfrac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}+3\mathrm{i}\right) - \sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i} = z_{\mathrm{E}}$.

Image de C : $z_{\mathrm{C'}} = \dfrac{1}{2}\times(-2\mathrm{i}) - \sqrt{3} = -\sqrt{3}-\mathrm{i} = z_{\mathrm{F}}$.

4. * Géométriquement : La question précédente montre que H est l'orthocentre de (ABC), donc son image par s est l'orthocentre du triangle (A′B′C′) qui est le triangle AEF.

Il suffit de tracer deux hauteurs de ce triangle.

* Par le calcul :

— On a démontré que $\overrightarrow{\text{AC}} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{\text{AE}}$ qui peut s'écrire $\overrightarrow{\text{EA}} + 3\overrightarrow{\text{EC}} = \overrightarrow{0}$.
Le point E est le barycentre du système {(A ; 1) ; (C ; 3)}. Le point H appartenant à la droite (BE) est barycentre des points E et B, soit en utilisant l'associativité du barycentre :
H bar. {(A ; 1) ; (C ; 3) ; (B ; α)}.

— De même $\overrightarrow{\text{AB}} = 3\overrightarrow{\text{AF}} \iff 2\overrightarrow{\text{FA}} + \overrightarrow{\text{FB}} = \overrightarrow{0}$ qui montre que F est le barycentre du système {(A ; 2) ; (B ; 1)}. Le point H appartenant à la droite (CF) est barycentre des points F et C, soit en utilisant l'associativité du barycentre :
H bar. {(A ; 2) ; (B ; 1) ; C ; β)}.

— Donc H = bar. {(A ; 2) ; (B ; 2α) ; (C ; 6)} = bar.{(A ; 2) ; (B ; 1) ; C ; β)}.
En prenant $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 3$, on obtient le même barycentre.
Conclusion : H est la barycentre du système {(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 6)}.
Or une similitude conserve le barycentre, donc H′ image de H par s est le barycentre du système {(A′ ; 2) ; (B′ ; 1) ; (C′ ; 6)} $\iff$
$\overrightarrow{\text{OH}'} = \dfrac{1}{17}\left(2\overrightarrow{\text{OA}'} + 1\overrightarrow{\text{OB}'} + 6\overrightarrow{\text{OC}'}\right)$ égalité qui se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_{\text{H}'} & = & \dfrac{-4\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{9} \\ y_{\text{H}'} & = & \dfrac{\frac{3}{2} - 6}{9} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x_{\text{H}'} & = & -\dfrac{7\sqrt{3}}{6} \\ y_{\text{H}'} & = & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

* Autre prolongement possible : montrer que s est composée :

— de la symétrie autour de $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$,

— de l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$,

— de la translation de vecteur $-\sqrt{3}\,\overrightarrow{u}$.

ANNEXE 2 (enseignement obligatoire et de spécialité)

(*À rendre avec la copie)*

Exercice 4