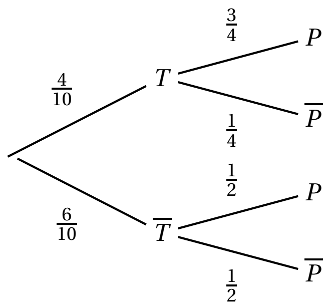
Corrigé du baccalauréat S La Réunion juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.**



- $p(P \cap T) = p(T) \times p_T(P) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$;
- $p\left(P \cap \overline{T}\right) = p\left(\overline{T}\right) \times p_{\overline{T}}(P) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$;
- D'après la loi des probabilités totales : $p(P) = p(P \cap T) + p\left(P \cap \overline{T}\right) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$.

b. Il faut trouver $p_P(T) = \dfrac{p(P \cap T)}{p(P)}$.

Donc $p_P(T) = \dfrac{p(P \cap T)}{p(P)} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

2. **a.** D'après la question précédente $p_{\overline{T}}(P) = \dfrac{1}{2}$, donc $p_{\overline{T}}(E) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$.

b. On a de même : $p_T(P) = \dfrac{3}{4}$, donc $p_{\overline{T}}(E) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 = \dfrac{81}{256}$ Donc la probabilité de l'évènement contraire est $p_T\left(\overline{E}\right) = 1 - \dfrac{81}{256} = \dfrac{256-81}{256} = \dfrac{175}{256} \approx 0,68$.

c. Il faut trouver la probabilité des deux évènements incompatibles $\overline{T} \cap E$ et $T \cap \overline{E}$, soit

$p\left(\overline{T} \cap E\right) + p\left(T \cap \overline{E}\right) = p\left(\overline{T}\right) \times p_{\overline{T}}(E) + p(T) \times p_T\left(\overline{E}\right) = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{1}{16} + \dfrac{4}{10} \times \dfrac{175}{256} = \dfrac{3}{80} + \dfrac{35}{128} = \dfrac{24}{640} + \dfrac{175}{640} = \dfrac{199}{640} \approx 0,32$ soit un peu moins d'une chance sur trois.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On a $z_{\text{O}'} = 0^3 - 3 \times 0^2 + 3 \times 0 = 0$. O est invariant par f.

$z_{\text{B}'} = \text{i}^3 - 3 \times (\text{i})^2 + 3\text{i} = -\text{i} + 3 + 3\text{i} = 3 + 2\text{i}$;

$z_{\text{C}'} = \left(\text{i}\sqrt{3}\right)^3 - 3 \times \left(\text{i}\sqrt{3}\right)^2 + 3\text{i}\sqrt{3} = -3\sqrt{3}\text{i} + 9 + 3\text{i}\sqrt{3} = 9$.

O, B$'$ et C$'$ ne sont pas alignés car il faudrait que l'affixe de B$'$ soit réelle : l'application f ne conserve pas l'alignement.

2. $z = z^3 - 3z^2 + 3z \iff z^3 - 3z^2 + 2z = 0$

$z^3 - 3z^2 + 2z = 0 \iff z\left(z^2 - 3z + 2\right) = 0$.

L'équation du second degré a deux racines évidentes : 1 et 2.

Il y a donc trois solutions : 0, 1 et 2.

Le point O et les points d'affixe 1 et 2 sont invariants par f.

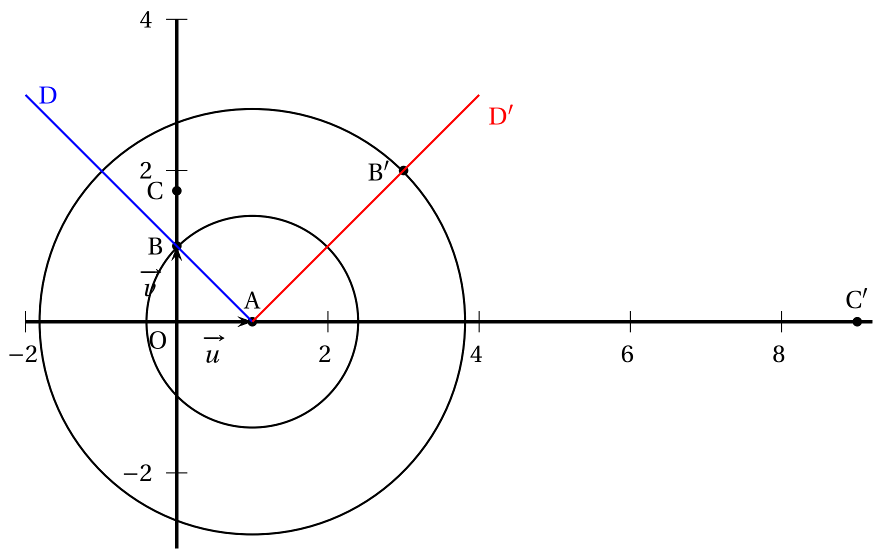
3. **a.** $z' = z^3 - 3z^2 + 3z \iff z' - 1 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \iff$

$z' - 1 = z^3 - 3z^2 \times 1 - 3 \times 1^2 z - (-1)^3) \iff z' - 1 = (z-1)^3$.

b. L'égalité $z' - 1 = (z-1)^3$ entraîne en prenant les modules :
$\left|z'-1\right| = \left|(z-1)^3\right| \iff \left|z'-1\right| = (\|z-1|)^3$ soit $r' = r^3$.
L'égalité $z' - 1 = (z-1)^3$ entraîne en prenant les arguments :
$\alpha' = 3\alpha$.
On a $r' = \text{A}M'$ et $r = \text{A}M$, donc $r' = r^3 \iff \text{A}M' = \text{A}M^3$; de même $\alpha = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M}\right)$ et $\alpha' = \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M'}\right)$ et la relation $\alpha' = 3\alpha$ devient $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M'}\right) = 3\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

c. Si M appartient au cercle Γ de centre A de rayon $\sqrt{2}$, alors $r = \sqrt{2}$, donc $r' = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2} = \text{A}M'$: ceci signifie que le point M' appartient au cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{2}$.

4. Le triangle OAB est rectangle isocèle donc $\left(\overrightarrow{\text{AO}}\,,\,\overrightarrow{\text{AB}}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.
Si M appartient à la demi-droite ouverte D d'origine A passant par le point B, alors $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M}\right) = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
D'après la question précédente $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M'}\right) = 3 \times \dfrac{3\pi}{4} + 6k\pi$ ou encore
$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M'}\right) = \dfrac{9\pi}{4} + 6k\pi$ ou $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M'}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.
Donc si M appartient à la demi-droite ouverte D d'origine A passant par le point B ; son image M' appartient à la demi-droite d'origine A telle que $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\text{A}M'}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.



Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $|-\text{i}| = 1$; s est donc un antidéplacement.
$M('z)$ est invariant par s si et seulement si :
$z = -\text{i}\overline{z}$ (1). Si $z = x + \text{i}y$, (1) devient :
$x + \text{i}y = -\text{i}(x - \text{i}y) \iff x + \text{i}y = -\text{i}x - y \iff x + y\text{i}(x+y) = 0 \iff$
$(x+y)(1+\text{i}) = 0 \iff x + y = 0$.
Les points doubles sont donc les points de la droite D d'équation $y = -x$; un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{w}$ d'affixe $1 - \text{i}$.
s est donc la symétrie orthogonale d'axe la droite D.

b. Les droites D et D′ sont sécantes, donc la composée des deux réflexions est la rotation dont le centre est le point commun aux deux droites, et

l'angle est le double de l'angle des vecteurs directeurs des deux axes de symétrie.
Le point commun à D et D′ est B d'affixe $1-\text{i}$.
D et D′ ayant pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$, on a $\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{w}\right)=\arg(1-\text{i})=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.
L'angle de la rotation est $2\left(\overrightarrow{w}\,,\,\overrightarrow{u}\right)=-2\times\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k'\pi\quad k'\in\mathbb{Z}$.
La rotation r est donc le quart-de-tour de centre B.

c. Une rotation centrée au point d'affixe ω et d'angle α est définie par $z'-\omega=\text{e}^{\text{i}\alpha}(z-\omega)$.
Avec $\omega=1-\text{i}$ et $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$:
$z'-1+\text{i}=\text{e}^{\text{i}}(z-1+\text{i})$ ou $z'-1+\text{i}=\text{i}(z-1+\text{i})\iff z'=\text{i}z+1-\text{i}-\text{i}-1\iff z'=\text{i}z-2\text{i}$.

2. a. Soit z_1 l'affixe du point A_1 ;
$z_1=\dfrac{1}{2}(2+\text{i})-\dfrac{1}{2}\text{i}(2-\text{i})=1+\dfrac{1}{2}\text{i}-\text{i}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}$.

b. On a par définition : $z_1=\dfrac{z+z'}{2}$; géométriquement ceci signifie que M_1 est le milieu du segment $[MM']$, c'est-dire sur l'axe de la réflexion s, autrement dit sur D qui a pour équation $y=-x$.

c. L'application p qui a tout point M fait correspondre le point M_1 est donc la projection orthogonale sur la droite D.

3. Si A'' est l'image du point A par f, A a pour image A_1 par p, qui a pour image par r le point A''.
A'' est donc le symétrique de A_1 par rapport à la droite D′, donc l'affixe de A'' est égale à $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}$.
Soit M un point quelconque du plan, son image par p est M_1 qui appartient à D ; puis M_1 est invariant par s, donc $s\circ p=p$.
Il s'ensuit que $f=s'\circ p=s'\circ(s\circ p)=\left(s'\circ s\right)\circ p=r\circ p$.
M a pour image par p le point M_1 qui appartient à D, donc $f(M)$ appartient à $r(\text{D})$.
Or l'image d'une droite par une rotation est une droite.
Conclusion : l'image de M par f appartient à l'image Δ de D par r.
Δ est la droite contenant B et orthogonale à D.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

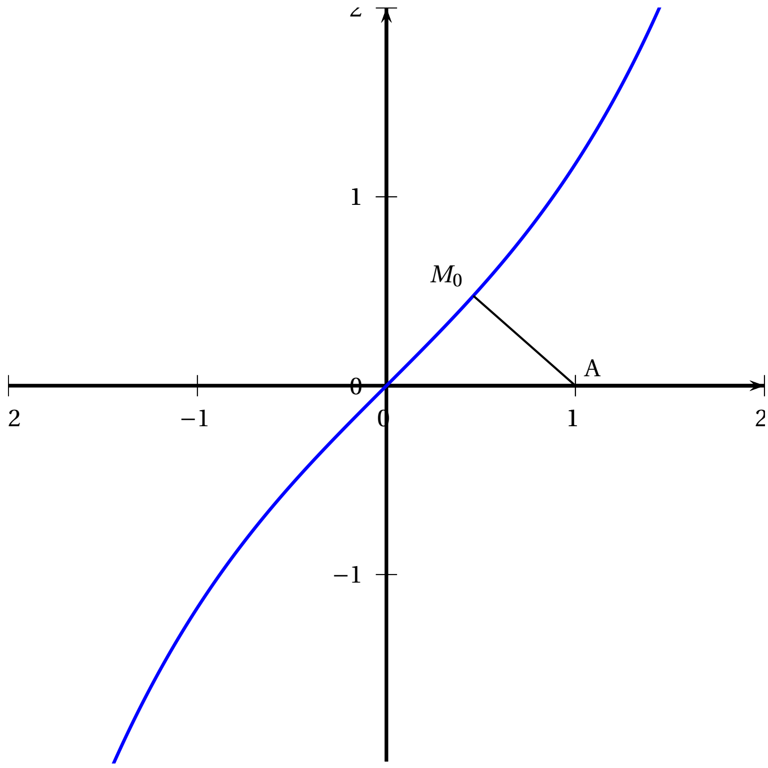
Partie A

$$f(x)=\frac{\text{e}^x-\text{e}^{-x}}{2}.$$

1. Quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\dfrac{\text{e}^{-x}-\text{e}^{x}}{2}=-\dfrac{\text{e}^{x}-\text{e}^{-x}}{2}=-f(x)$: la fonction f est donc impaire et le point O est centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\text{e}^{-x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\text{e}^{x}=+\infty$, d'où par somme de limites,
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x)=\dfrac{\text{e}^{x}+\text{e}^{-x}}{2}>0$ car somme de deux termes supérieurs à zéro. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On a également $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

3.



Partie B

1. Avec $M\left(x\,;\,\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$, on a :

$\mathrm{A}M^2 = (x-1)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{4(x-1)^2 + (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}{4}$.

2.

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}{2}.$$

a. Quel que soit x, $g'(x) = 2(x-1) + \dfrac{2\,(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\,(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{4} = 2(x-1) + \dfrac{\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}\right)}{2}$.

b. Quel que soit x, $g''(x) = 2 + \dfrac{\left(2\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{-2x}\right)}{2}$

$$g''(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2.$$

c. On a $g''(x) > 0$ car somme de trois termes supérieurs à zéro ; g' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d. On a $g'(0) = -2 + \dfrac{1-1}{2} = -2$ et $g'(1) = 0 + \dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2}{2} \approx 3,6$.
Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, g' est continue car dérivable et $g'(0)\times g'(1) < 0$: il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
On a $g'(0,46) \approx -0,02$ et $g'(0,47) \approx 0,02$, ce qui montre que $0,46 < \alpha < 0,47$. $g'(\alpha) = 0$ et g' est croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

- si $x < \alpha$, $g'(x) < 0$;
- si $x > \alpha$, $g'(x) > 0$.

e. On déduit du résultat précédent que g est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $g(\alpha)$ étant le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

On a $\mathrm{A}M = d(x) = \sqrt{g(x)}$; comme A n'est pas un point de $\mathscr{C}$, $d(x) > 0$ et $g(x) > 0$.

La fonction d est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction g l'est aussi et sur $\mathbb{R}$:
$d'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.
Comme $\sqrt{g(x)} > 0$, le signe de $d'(x)$ est celui de $g'(x)$ vu au-dessus.
Donc d est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, avec donc un minimum en $\alpha \approx 0,46$.
Les coordonnées de M_0 sont à peu près $(0,46\,;\,0,48)$.

4. On a donc $g'(\alpha) = 0 \iff 2(\alpha - 1) + \dfrac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} \iff \alpha - 1 = -\dfrac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{4} \iff$
$\alpha - 1 = -\dfrac{1}{2}f(2\alpha)$.
D'où $g(\alpha) = (\alpha - 1)^2 + \dfrac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})^2}{4} = \left[-\dfrac{1}{2}f(2\alpha)\right]^2 + [f(\alpha)]^2 = \dfrac{1}{4}[f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2$.
Par croissance de la fonction f :
$0,46 < \alpha < 0,47 \Rightarrow f(0,46) < f(\alpha) < f(0,47)$, puis par croissance de la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$,
$[f(0,46)]^2 < [f(\alpha)]^2 < [f(0,47)]^2$ (1).
De façon analogue on obtient :
$0,92 < 2\alpha < 0,94 \Rightarrow [f(0,92)]^2 < [f(2\alpha)]^2 < [f(0,94)]^2$ (2).
Par somme les encadrements (1) et (2), donnent car $\dfrac{1}{4} > 0$,
$\dfrac{1}{4}[f(0,92)]^2 + [f(0,46)]^2 < \dfrac{1}{4}[f(2\alpha)]^2 + [f(\alpha)]^2 < \dfrac{1}{4}[f(0,94)]^2 + [f(0,47)]^2$ soit $0,505 < g(\alpha) < 0,532$ et enfin $0,71 < \mathrm{A}M_0 < 0,73$.

Partie C

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}}{2}.$$

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e + e^{-1} - 2}{2}$.

2. Pour $x \in [0\,;\,1]$, on a successivement :
$x \geqslant -x \Rightarrow \dfrac{x}{n} \geqslant -\dfrac{x}{n} \Rightarrow e^{\frac{x}{n}} \geqslant e^{-\frac{x}{n}} \Rightarrow e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}} \geqslant 0$: la fonction f_n est donc positive sur $[0\,;\,1]$ et par conséquent l'intégrale I_n est en unité d'aire, l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
$I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{ne^{\frac{x}{n}} + ne^{-\frac{x}{n}}}{2}\right]_0^1 = \frac{ne^{\frac{1}{n}} + ne^{-\frac{1}{n}} - 2n}{2}$.

3. • $ne^{\frac{1}{n}} = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}$;

• $ne^{-\frac{1}{n}} = -\dfrac{e^{-\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n}}$.

Donc • $I_n = \dfrac{1}{2}\left(ne^{\frac{1}{n}} - n + e^{-\frac{1}{n}} - n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \dfrac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}}\right)$.
En posant $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, on a donc $I_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{\epsilon} - 1}{\epsilon} - \dfrac{e^{-\epsilon} - 1}{-\epsilon}\right)$.
Quand n tend vers plus l'infini, ϵ tend vers zéro.
Or $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{\epsilon} - 1}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{\epsilon} - e^0}{\epsilon - 0}$: par définition cette limite est égale au nombre dérivé de e^x en zéro soit $e^0 = 1$.
De même $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{-\epsilon} - 1}{-\epsilon} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.