

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Liban juin 2004

EXERCICE 1

4 points

1. Soient les évènements :

- F : « La personne interrogée est une femme »
- H : « La personne interrogée est un homme »
- S : « La personne interrogée est un soignant »
- AT : « La personne interrogée est un membre du personnel administratif ou technique ».

L'énoncé se traduit par les probabilités suivantes :

$$p(H) = 0,12;$$

$$p(S) = 0,71;$$

$$p_M(H) = 0,67;$$

$$p_S(F) = 0,92.$$

a. $p(S) \neq 0$, donc $p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{p(S)} \iff p(S \cap F) = p_S(F) \times p(S) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532$.

b. De même $p(M \cap F) = p_M(F) \times p(M) = 0,33 \times 0,12 = 0,0396$.

c. Par définition $p_{AT}(F) = \frac{p(AT \cap F)}{p(AT)}$.

On sait que $p(M) + p(S) + p(AT) = 1 \iff p(AT) = 1 - p(M) - p(S) = 1 - 0,12 - 0,71 = 0,17$.

D'autre part les femmes sont 80 % et se répartissent en trois catégories : médecin, soignant, personnel administratif ou technique. Donc :

$$p(F) = 0,80 = p(F \cap M) + p(F \cap S) + p(F \cap AT) \iff p(F \cap AT) =$$

$$p(F) - p(F \cap M) - p(F \cap S) = 0,80 - 0,0396 - 0,653 = 0,1072.$$

2. Soit X la variable aléatoire uniformément répartie sur $[0; 1]$ égale à la durée en heure de la durée du transport.

On sait que si x et y sont tels que $0 \leq x \leq 1$, alors $p(x \leq X \leq y) = y - x$.

On a donc ici avec $15 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ h}$ et $20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$,

$$p\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0,0833 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

3. On a ici un schéma de Bernoulli, avec $n = 40$ et $p = 0,25 = p(M)$.

$$\text{On a } p_{10/40} = \binom{40}{10} 0,25^{10} \times (1 - 0,25)^{40-10} \approx 0,0113$$

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0 \iff z - 2i = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$.

On résout les deux équations séparément. On trouve 3 solutions (il faut détailler les calculs : $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z - 1)^2 + 1 = 0 \iff (z - 1)^2 - i^2 = 0 \iff z - 1 + i = 0$ ou $z - 1 - i = 0 \iff \dots$).

$$z_0 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2. Dans ce type d'exercice, on retrouve toujours les solutions de la première question dans la suite de l'énoncé.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$.

À tout complexe z différent de A on associe le complexe

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}.$$

- a. — $z'_B = \frac{2i - 2i}{2i - 1 - i} = 0$. $0 = 0i$ est bien un imaginaire pur, donc $B \in (E)$.
— Détermination de (E) .

On peut remplacer z par $x + iy$ et obtenir l'équation de (E) . Une méthode géométrique est plus rapide :

$$\begin{aligned} z' \text{ imaginaire pur} &\iff \arg(z') = \frac{\pi}{2} (\pi) \\ &\iff \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} (\pi) \\ &\iff \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} (\pi) \\ &\iff AMB \text{ est un triangle rectangle en } B \end{aligned}$$

L'ensemble (E) est donc le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A (en effet, z'_A n'est pas défini).

Remarque : quand on écrit $\alpha = \frac{\pi}{2} (\pi)$, cela signifie que l'angle mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ (à $2k\pi$ près), bref, que c'est un angle droit.

Plusieurs notations coexistent, on peut aussi écrire $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- b. $|z'| = 1 \iff \left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = 1$
 $\iff |z - z_B| = |z - z_A|$
 $\iff BM = MA$

L'ensemble F est la médiatrice du segment $[AB]$.

3. Soit R la rotation de centre $\Omega \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- a. Écriture complexe de la rotation :

$$z' - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_\Omega)$$

$$z_{B'} = i \left(2i - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2} \right) + \frac{3}{2} + i\frac{5}{2} = \dots = 2 + i.$$

$$\text{Par un calcul similaire, on obtient } z_{I'} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

- b. Pour cette question, il faut remarquer que I est le milieu de $[AB]$.

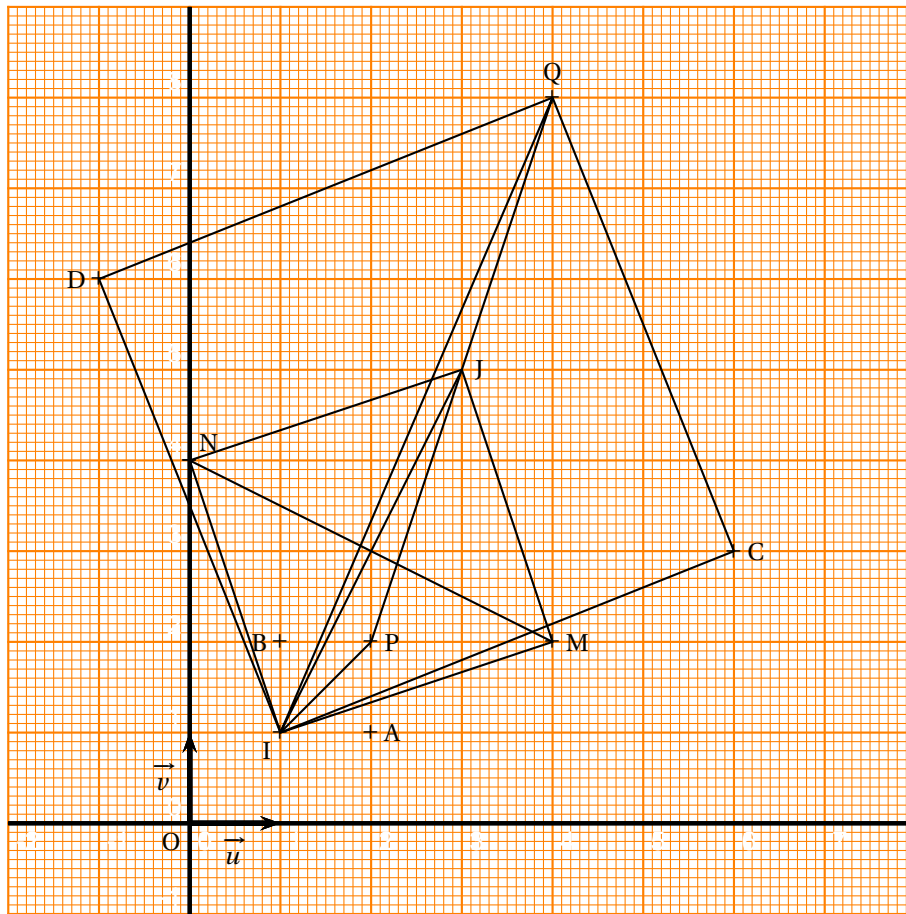
Ainsi, (E) est le cercle de centre I et de rayon IB. Son image par la rotation R est le cercle de centre I' et de rayon $I'B'$.

On remarque aussi que Ω est un point de la médiatrice de $[AB]$. (F) est la droite (ΩI) .

L'image de Ω par R est Ω (le centre d'une rotation est un point fixe), donc l'image de (F) est la droite $(\Omega I')$

EXERCICE 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points



1. Figure

2. La similitude f .

Comme $A \neq C$ et $B \neq D$, il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$.

On sait que l'écriture d'une telle similitude est $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, z' étant l'affixe du point M' image du point M d'affixe z par f .

$$\text{On a } \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2i = a(2+i) + b \\ -1+6i = a(6+3i) + b \end{cases}$$

$$\text{Par différence on obtient } -2+4i = a(4+2i) \iff -1+2i = a(2+i) \iff a = \frac{-1+2i}{2+i} = \frac{i(i+2)}{2+i} = i.$$

En substituant dans l'une des équations du système initial : $b = 1+2i-i(2+i) = 1+1 = 2$.

Conclusion : l'écriture complexe de f est donc $z' = iz + 2$.

On a $|a| = |i| = 1$ et $\arg a = \arg i = \frac{\pi}{2}$.

Donc la similitude a pour rapport 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$: c'est une rotation et plus précisément un quart de tour direct.

$$\text{Son centre vérifie } c = ic + 2 \iff c(1-i) = 2 \iff c = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{1+1} = 1+i.$$

Le centre de la rotation est le point $I(1; 1)$.

3. La rotation R est définie par $z' - (3 + 5i) = -i[z - (3 + 5i)] \iff z' = -iz - 2 + 8i$.
 On a donc $z_{R(A)} = -i(2 + i) - 2 + 8i = -1 + 6i = z_D$;
 De même $z_{R(C)} = -i(6 + 3i) - 2 + 8i = 1 + 2i = z_{z_B}$.
 Conclusion : les images respectives de A et C par R sont D et B .
4. Dans la rotation f $[AC]$ a pour image $[BD]$ et son milieu M a pour image le milieu de $[BD]$ soit N .
 De même, dans la rotation R $[AC]$ a pour image $[DB]$, donc son milieu M a pour image le milieu de $[DB]$ soit N . Les triangles IMN et JMN sont donc des triangles rectangles isocèles de même hypoténuse $[MN]$. Donc $IMJN$ a ses quatre côtés de même longueur : c'est donc un losange, qui a un angle droit : c'est un carré (de sens direct).
5. a. Affixe de P : l'égalité $\vec{IA} = \vec{BP} \Rightarrow 1 = z_P - 1 - 2i \iff z_P = 2 + 2i$.
 Affixe de Q : de même $\vec{DQ} = \vec{IC} \Rightarrow z_Q - (-1 + 6i) = 5 + 2i \iff z_Q = -1 + 6i + 5 + 2i = 4 + 8i$.
- b. IAP est un triangle rectangle (en A) isocèle : on a donc $IP = IA\sqrt{2} \iff \frac{IP}{IA} = \sqrt{2}$ et $(\vec{IA}, \vec{IP}) = \frac{\pi}{4}$.
 De la même façon on démontre que $\frac{IQ}{IC} = \sqrt{2}$ et $(\vec{IC}, \vec{IQ}) = \frac{\pi}{4}$.
 On a donc de façon classique : la similitude g de centre I , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transforme A en P et C en Q : les points étant distincts, elle est unique.
- c. On a vu que $IMJN$ est un carré direct : on a donc $IJ = IM\sqrt{2}$ et $(\vec{IM}, \vec{IJ}) = \frac{\pi}{4}$. Donc J est l'image de M dans la similitude g .
 Par g l'image de $[AC]$ est le segment $[PQ]$, donc l'image du milieu M de $[AC]$ est le milieu de $[PQ]$ soit J .

EXERCICE 3

5 points

1. a. Récurrence sur n :
- Initialisation : Pour $n = k$, $\frac{k^k}{k!} \leq \frac{k^k}{k!}$;
 - Hérédité : supposons qu'il existe $n \geq k$, tel que $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$. On a $0 \leq k \leq n < n + 1$, d'où par quotient par $n + 1$, $\frac{k}{n+1} \leq 1$;
 Donc par produit : $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$ et $\frac{k}{n+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{k^n}{n!} \times \frac{k}{n+1} \leq \frac{k^k}{k!} \times 1 \iff \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k^k}{k!}$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.
 On a montré par récurrence que : pour tout entier $n \geq k$, $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$.
- b. On a $\frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{k^n} \times \frac{k^n}{n!} \leq \frac{x^n}{k^n} \times \frac{k^k}{k!}$ soit $\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$.
- c. On sait que $x < k$, donc $\frac{x}{k} < 1$ et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$ et ensuite d'après l'inégalité précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.
2. a. On a $\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \dots \times \frac{n}{n}$. Chacun des facteurs du produit est supérieur ou égal à 1, donc $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$.

b. $\frac{n^n}{n!} = \frac{n^{n-1}}{n!} \times n \geq n$, d'après la question précédente; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

EXERCICE 4

7 points

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$.

Conclusion $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

2. $f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} = 2\ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{1 + e^x} = 2\ln 4 + \frac{2(1 + e^x)}{1 + e^x} = 2\ln 4 + 2$ (après multiplication par e^x du second quotient).

On a donc : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 2(\ln 4 + 1)$.

On en déduit que le point A de coordonnées $(0; \ln 4 + 1)$ est centre de symétrie de \mathcal{C} .

3. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, la fonction $x \mapsto e^x + 1$ ne s'annulant pas sur \mathbb{R} .

$$\text{On a } f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}.$$

Ce quotient est supérieur à zéro car quotient de termes positifs le numérateur étant supérieur ou égal à 1.

Conclusion : la fonction f est croissante sur \mathbb{R} .

Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. a. La fonction f est continue comme somme de fonctions continues et croissante sur \mathbb{R} , les images appartenant à \mathbb{R} (cf. le tableau de variations). Donc tout réel m a un antécédent par f .

Quel que soit $m \in \mathbb{R}$, $f(x) = m$ a une solution unique dans \mathbb{R} .

b. Solution de $f(x) = 3$. La calculatrice donne :

$$f(1,1) \approx 2,986, f(1,2) \approx 3,049.$$

Si $f(a) = 3$, de $f(1,2) < f(a) < f(1,3)$ on déduit par croissance de la fonction f , que :

$$1,1 < a < 1,2$$

- c. D'après la question 2 on sait que $f(a) + f(-a) = 2(\ln(4) + 1) \iff$
 $f(-a) = 2(\ln(4) + 1) - f(a) = 2(\ln(4) + 1) - 3 = 2\ln(4) - 1.$
 Conclusion $(-a)$ est solution de l'équation $f(x) = 2\ln(4) - 1.$

5. a. On peut écrire $f(x) = x + 2 + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - 2 = x + 2 + \ln 4 + \frac{2 - 2e^x - 2}{e^x + 1} =$
 $x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}.$

- b. D'après la question 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + \ln 4) = 0_+.$

Il en résulte que la droite d'équation $y = x + \ln 4$ est asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de plus l'infini, la courbe étant au dessus de son asymptote.

De même d'après la question a. précédente $f(x) - (x + 2 + \ln 4) = -\frac{2e^x}{e^x + 1}$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2e^x}{e^x + 1} = 0_-$, ce qui signifie que la droite d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ est asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de moins l'infini en étant au dessus de la courbe (\mathcal{C}) .

6. a. On vient de voir que la courbe (\mathcal{C}) est au dessus de la droite d'équation $y = x + 4$, donc $f(x) - (x + 4) > 0$. Le nombre α étant positif, l'intégrale est égale à l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

- b. D'après 5. a. on peut écrire

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^\alpha [f(x) - (x + \ln 4)] dx = \int_0^\alpha [x + 2 + \ln 4 - 2\frac{e^x}{e^x + 1} - x - \ln 4] dx \\ &= \int_0^\alpha \left[2 - 2\frac{e^x}{e^x + 1} \right] dx = [2x - 2\ln(e^x + 1)]_0^\alpha = 2\alpha + 2\ln 2 - 2\ln(e^\alpha + 1) = \\ &2\ln e^\alpha + 2\ln 2 - 2\ln(e^\alpha + 1) = 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1}\right). \end{aligned}$$

- c. Cherchons α tel que $I(\alpha) = 1 \iff 2\ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1}\right) = 1 \iff \ln\left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1}\right) =$

$$\frac{1}{2} \iff \frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \iff 2e^\alpha = \sqrt{e}(e^\alpha + 1) \iff e^\alpha(2 - \sqrt{e}) = \sqrt{e}$$

$$\iff e^\alpha = \frac{\sqrt{e}}{2 - \sqrt{e}} \iff \alpha = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2 - \sqrt{e}}\right) \approx 1,54.$$

Pour $\alpha \approx 1,5$, $I(\alpha) \approx 1$.

En fait $I(1,5) \approx 0,983$, $I(1,54) \approx 0,998$, $I(1,5461) \approx 0,99997$.