Durée : 4 heures

∾ Corrigé du baccalauréat S Liban juin 2004 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Soient les évènements :

— F : « La personne interrogée est une femme »

— H : « La personne interrogée est un homme »

— S : « La personne interrogée est un soignant »

— AT : « La personne interrogée est un membre du personnel administratif ou technique ».

L'énoncé se traduit par les probabilités suivantes :

$p(H) = 0,12$;

$p(S) = 0,71$:

$p_M(H) = 0,67$;

$p_S(F) = 0,92$.

a. $p(S) \neq 0$, donc $p_S(F) = \dfrac{p(S \cap F)}{p(S)} \iff p(S \cap F) = p_S(F) \times p(S) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532$.

b. De même $p(M \cap \text{F}) = p_M(F) \times p(M) = 0,33 \times 0,12 = 0,0396$.

c. Par définition $p_{AT}(F) = \dfrac{p(AT) \cap p(F)}{p(AT)}$.

On sait que $p(M) + p(\S) + p(AT) = 1 \iff p(AT) = 1 - p(M) - p(S) =$
$1 - 0,12 - 0,71 = 0,17$.

D'autre part les femmes sont 80 % et se répartissent en trois catégories : médecin, soignant, personnel administratif ou technique. Donc :

$p(F) = 0,80 = p(F \cap M) + p(F \cap S) + p(F \cap AT) \iff p(F \cap AT) =$
$p(F) - p(F \cap M) - p(F \cap S) = 0,80 - 0,0396 - 0,653 = 0,1072$.

2. Soit X la variable aléatoire uniformément répartie sur $[0;\ 1]$ égale à la durée en heure de la durée du transport.

On sait que si x et y sont tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $p(x \leqslant X \leqslant y) = y - x$.

On a donc ici avec 15 min = $\dfrac{1}{4}$ h et 20 min = $\dfrac{1}{3}$ h,

$$p\left(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0{,}0883 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

3. On a ici un schéma de Bernoulli, avec $n = 40$ et $p = 0,25 = p(\text{M})$.

On a $p_{10/40} = \binom{40}{10} 0,12^{10} \times (1 - 0,12)^{40-10} \approx 0{,}0113$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $(z - 2\text{i})\left(z^2 - 2z + 2\right) = 0 \iff z - 2\text{i} = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$.

On résout les deux équations séparément. On trouve 3 solutions (il faut détailler les calculs : $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z-1)^2 + 1 = 0 \iff (z-1)^2 - \text{i}^2 = 0 \iff z - 1 + \text{i} = 0$ ou $z - 1 - \text{i} = 0 \iff \ldots$).

$z_0 = 2\text{i} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$

$z_1 = 1 - \text{i} = \sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 1 + \text{i} = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

2. *Dans ce type d'exercice, on retrouve toujours les solutions de la première question dans la suite de l'énoncé.*

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_\text{A} = 1 + \text{i}$ et $z_\text{B} = 2\text{i}$.

À tout complexe z différent de A on associe le complexe

$$z' = \frac{z - 2\text{i}}{z - 1 - \text{i}}.$$

a. — $z'_B = \frac{2\mathrm{i}-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1-\mathrm{i}} = 0$. $0 = 0\mathrm{i}$ est bien un imaginaire pur, donc $\mathrm{B} \in (E)$.

— Détermination de (E).

On peut remplacer z par $x + \mathrm{i}y$ et obtenir l'équation de (E). Une méthode géométrique est plus rapide :

$$\begin{aligned} z' \text{ imaginaire pur} &\iff \arg(z') = \frac{\pi}{2}(\pi)\\ &\iff \arg\left(\frac{z-z_\mathrm{B}}{z-z_\mathrm{A}}\right) = \frac{\pi}{2}(\pi)\\ &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}\,;\overrightarrow{\mathrm{B}M}\right) = \frac{\pi}{2}(\pi)\\ &\iff \mathrm{A}M\mathrm{B} \text{ est un triangle rectangle en } B \end{aligned}$$

L'ensemble (E) est donc le cercle de diamètre [AB] privé du point A (en effet, z'_A n'est pas défini).

*R*emarque : quand on écrit $\alpha = \frac{\pi}{2}(\pi)$, cela signifie que l'angle mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ (à $2k\pi$ près), bref, que c'est un angle droit.
Plusieurs notations coexistent, on peut aussi écrire $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b.
$$\begin{aligned} \left|z'\right| = 1 &\iff \left|\frac{z-z_\mathrm{B}}{z-Z_\mathrm{A}}\right| = 1 \quad .\\ &\iff |z-z_\mathrm{B}| = |z-z_\mathrm{A}|\\ &\iff \mathrm{B}M = M\mathrm{A} \end{aligned}$$

L'ensemble F est la médiatrice du segment [AB].

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

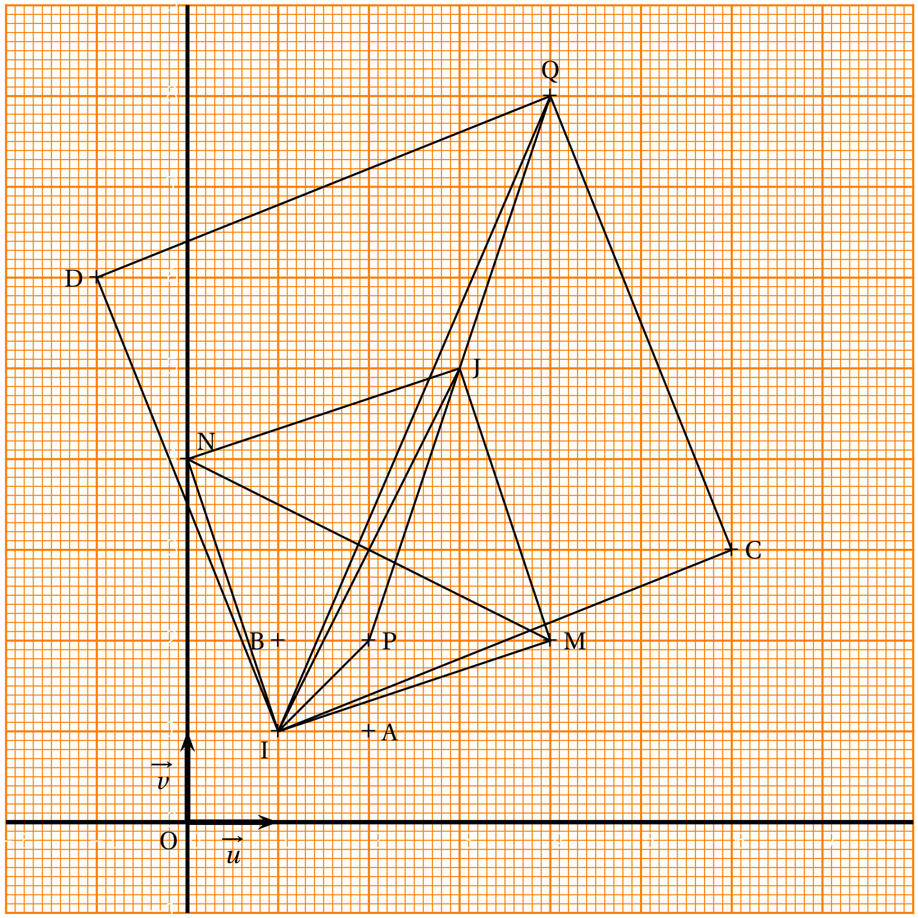
a. Écriture complexe de la rotation :
$z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$
$z_{B'} = \mathrm{i}\left(2\mathrm{i} - \frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{5}{2} = \ldots = 2 + \mathrm{i}$.
Par un calcul similaire, on obtient $z_{I'} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$

b. Pour cette question, il faut remarquer que I est le milieu de [AB].

Ainsi, (E) est le cercle de centre I et de rayon IB. Son image par la rotation R est le cercle de centre I' et de rayon $I'B'$.

On remarque aussi que Ω est un point de la médiatrice de [AB]. (F) est la droite (ΩI).

L'image de Ω par R est Ω (le centre d'une rotation est un point fixe), donc l'image de (F) est la droite $(\Omega I')$



1. Figure
2. La similitude f.

   Comme A ≠ C et B ≠ D, il existe une unique similitude directe f telle que $f(\text{A}) = \text{B}$ et $f(\text{C}) = \text{D}$.

   On sait que l'écriture d'une telle similitude est $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, z' étant l'affixe du point M' image du point M d'affixe z par f.

   On a $\left\{\begin{array}{lll} z_{\text{B}} & = & az_{\text{A}} + b \\ z_{\text{D}} & = & az_{\text{C}} + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 1+2\text{i} & = & a(2+\text{i}) + b \\ -1+6\text{i} & = & a(6+3\text{i}) + b \end{array}\right.$

   Par différence on obtient $-2+4\text{i} = a(4+2\text{i}) \iff -1+2\text{i} = a(2+\text{i}) \iff a = \dfrac{-1+2\text{i}}{2+\text{i}} = \dfrac{\text{i}(\text{i}+2)}{2+\text{i}} = \text{i}$.

   En substituant dans l'une des équations du système initial : $b = 1+2\text{i} - \text{i}(2+\text{i}) = 1+1 = 2$.

   Conclusion : l'écriture complexe de f est donc $z' = \text{i}z + 2$.

   On a $|a| = |\text{i}| = 1$ et $\arg a = \arg \text{i} = \dfrac{\pi}{2}$.

   Donc la similitude a pour rapport 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{2}$: c'est une rotation et plus précisément un quart de tour direct.

   Son centre vérifie $c = \text{i}c + 2 \iff c(1-\text{i}) = 2 \iff c = \dfrac{2}{1-\text{i}} = \dfrac{2(1+\text{i}}{1+1} = 1+\text{i}$.

   Le centre de la rotation est le point I(1 ; 1).
3. La rotation R est définie par $z' - (3+5\text{i}) = -\text{i}[z - (3+5\text{i})] \iff z' = -\text{i}z - 2 + 8\text{i}$.

   On a donc $z_{\text{R(A)}} = -\text{i}(2+\text{i}) - 2 + 8\text{i} = -1 + 6\text{i} = z_{\text{D}}$;

De même $z_{R(C)} = -i(6+3i) - 2 + 8i = 1 + 2i = z_{z_B}$.
Conclusion : les images respectives de A et C par R sont D et B.

4. Dans la rotation f [AC] a pour image [BD] et son milieu M a pour image le milieu de [BD] soit N.
De même, dans la rotation R [AC] a pour image [DB], donc son milieu M a pour image le milieu de [DB] soit N. Les triangles IMN et JMN sont donc des triangles rectangles isocèles de même hypoténuse [MN]. Donc IMJN a ses quatre côtés de même longueur : c'est donc un losange, qui a un angle droit : c'est un carré (de sens direct).

5. **a.** Affixe de P : l'égalité $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BP} \Rightarrow 1 = z_P - 1 - 2i \iff z_P = 2 + 2i$.
Affixe de Q : de même $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{IC} \Rightarrow = z_Q - (-1+6i) = 5 + 2i \iff$
$z_Q = -1 + 6i + 5 + 2i = 4 + 8i$.

b. IAP est un triangle rectangle (en A) isocèle : on a donc $IP = IA\sqrt{2} \iff \dfrac{IP}{IA} = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{IP}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
De la même façon on démontre que $\dfrac{IQ}{IC} = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{IQ}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
On a donc de façon classique : la similitude g de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ transforme A en P et C en Q : les points étant distincts, elle est unique.

c. On a vu que IMJN est un carré direct : on a donc $IJ = IM\sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IJ}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Donc J est l'image de M dans la similitude g.
Par g l'image de [AC] est le segment [PQ], donc l'image du milieu M de [AC] est le milieu de [PQ] soit J.

EXERCICE 3 — 5 points

1. **a.** Récurrence sur n :
— Initialisation : Pour $n = k$, $\dfrac{k^k}{k!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$;
— Hérédité : supposons qu'il existe $n \geqslant k$, tel que $\dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$. On a
$0 \leqslant k \leqslant n < n+1$, d'où par quotient par $n+1$, $\dfrac{k}{n+1} \leqslant 1$;
Donc par produit : $\dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$ et $\dfrac{k}{n+1} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{k^n}{n!} \times \dfrac{k}{n+1} \leqslant \dfrac{k^k}{k!} \times 1 \iff \dfrac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.
On a montré par récurrence que : pour tout entier $n \geqslant k$, $\dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

b. On a $\dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x^n}{k^n} \times \dfrac{k^n}{n!} \leqslant \dfrac{x^n}{k^n} \times \dfrac{k^k}{k!}$ soit $\dfrac{x^n}{n!} \leqslant \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!}$.

c. On sait que $x < k$, donc $\dfrac{x}{k} < 1$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n = 0$ et ensuite d'après l'inégalité précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

2. **a.** On a $\dfrac{n^{n-1}}{n!} = \dfrac{n}{2} \times \dfrac{n}{3} \times \ldots \times \dfrac{n}{n}$. Chacun des facteurs du produit est supérieur ou égal à 1, donc $\dfrac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$.

b. $\dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n^{n-1}}{n!} \times n \geqslant n$, d'après la question précédente ; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x+1} = 0$.

Conclusion $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De même $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

2. $f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1} - x + \ln 4 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{-x}+1} = 2\ln 4 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1} + \dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 2\ln 4 + \dfrac{2\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{1+\mathrm{e}^x} =$ $2\ln 4 + 2$ (après multiplication par e^x du second quotient).

On a donc : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 2(\ln 4 + 1)$.

On en déduit que le point A de coordonnées $(0\ ;\ \ln 4 + 1)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

3. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x + 1$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = 1 - \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{(\mathrm{e}^x+1)^2 - 2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.

Ce quotient est supérieur à zéro car quotient de termes positifs le numérateur étant supérieur ou égal à 1.

Conclusion : la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** La fonction f est continue comme somme de fonctions continues et croissante sur $\mathbb{R}$, les images appartenant à $\mathbb{R}$ (cf. le tableau de variations). Donc tout réel m a un antécédent par f.

Quel que soit $m \in \mathbb{R}$, $f(x) = m$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

b. Solution de $f(x) = 3$. La calculatrice donne :

$f(1,1) \approx 2{,}986$, $f(1,2) \approx 3{,}049$.

Si $f(a) = 3$, de $f(1,2) < f(a) < f(1,3)$ on déduit par croissance de la fonction f, que :

$$1{,}1 < a < 1{,}2$$

c. D'après la question 2 on sait que $f(a) + f(-a) = 2(\ln(4)+1) \iff$ $f(-a) = 2(\ln(4)+1) - f(a) = 2(\ln(4)+1) - 3 = 2\ln(4) - 1$.

Conclusion $(-a)$ est solution de l'équation $f(x) = 2\ln(4) - 1$.

5. **a.** On peut écrire $f(x) = x + 2 + \ln 4 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1} - 2 = x + 2 + \ln 4 + \dfrac{2 - 2\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x+1} = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

b. D'après la question 1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x + \ln 4) = 0_+$.

Il en résulte que la droite d'équation $y = x + \ln 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini, la courbe étant au dessus de son asymptote.

De même d'après la question a. précédente $f(x) - (x + 2 + \ln 4) = -\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} =$ 0_-, ce qui signifie que la droite d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de moins l'infini en étant au dessus de la courbe $(\mathscr{C})$.

6. a. On vient de voir que la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite d'équation $y = x+4$, donc $f(x)-(x+4) > 0$. Le nombre α étant positif, l'intégrale est égale à l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

b. D'après 5. a. on peut écrire

$I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} [f(x)-(x+\ln 4]\,\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} [x+2+\ln 4-2\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-x-\ln 4]\,\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\int_0^{\alpha}\left[2-2\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right]\mathrm{d}x = \left[2x-2\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\right]_0^{\alpha} = 2\alpha+2\ln 2-2\ln\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right) =$

$2\ln \mathrm{e}^{\alpha}+2\ln 2-2\ln(\mathrm{e}^{\alpha}+1) = 2\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}\right).$

c. Cherchons α tel que $I(\alpha) = 1 \iff 2\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}\right) = 1 \iff \ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}\right) = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}+1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} =$ $\sqrt{\mathrm{e}} \iff 2\mathrm{e}^{\alpha} = \sqrt{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^{\alpha}+1) \iff \mathrm{e}^{\alpha}\left(2-\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}$

$\iff \mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2-\sqrt{\mathrm{e}}} \iff \alpha = \ln\left(\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2-\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \approx 1,54.$

Pour $\alpha \approx 1,5,\ I(\alpha) \approx 1$.

En fait $I(1,5) \approx 0,983,\ I(1,54) \approx 0,998,\ I(1,546\,1) \approx 0,999\,97$.