Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Liban juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

1. « Faux » ; exemple $a = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. « Faux » ; exemple $f(x) = x$, $g(x) = x^2 + 1$.
3. « Vrai »Si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x} > 0$ et en multipliant chaque membre de l'encadrement, on obtient $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Le théorème des « gendarmes »permet de conclure.
4. « Faux » ; exemple $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. « Vrai » : il suffit de faire le calcul.
6. « Vrai » : associativité du barycentre :
   G bar $\{(\text{A},\ 3),\ (\text{B},\ -2),\ (\text{C},\ 1)\} = \text{bar}\{(\text{I},\ 1),\ (\text{C},\ 1)\}$ qui est le milieu de [IC].
7. « Faux » : $\left\|3\overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 1 \iff \left\|2\overrightarrow{M\text{G}}\right\| = 1 \iff \text{G}M = \dfrac{1}{2}$. Le rayon du cercle n'est pas 1.
8. « Faux » : tous les points M appartenant au cercle de diamètre [AB] vérifient la relation (y compris A et B).

EXERCICE 2 **3 points**

1. $p(T_1) = 0,7$. Sur les 30 % ne passant pas le premier test 65 % soit une probabilité de $0,30 \times 0,65 = 0,195$.
   Donc $p(C) = 0,7 + 0,195 = 0,895$.
2. Les écrans passant le premier test procurent un « gain » de $a - 1\,000$; ceux passant le second test un « gain » de $a - 1050$ et les autres un « gain » de $-1\,000$.
   a. D'où la loi de probabilité :

	1^{er} test	2^{e} test	refusés
$p(X = x_i)$	$0,7$	$0,195$	$0,105$
« gain »	$a - 1\,000$	$a - 1\,050$	$-1\,050$

   b. $E(X) = 0,7 \times (a - 1\,000) + 0,195 \times (a - 1\,050) + 0,105 \times (-1\,050) =$
   $E(X) = 0,895a - 1\,015$.

   c. L'entreprise peut espérer un bénéfice si l'espérance de gain est positive, soit $E(X) \geqslant 0 \iff a \geqslant \dfrac{1015}{0,895} \approx 1\,134,08$ €. (à un centime près par excès)

EXERCICE 3 **8 points**

Partie A

1. Dérivée : $\left[(2 - t)\text{e}^t\right]' = -\text{e}^t + (2 - t)\text{e}^t = (1 - t)\text{e}^t$.
   $u_1 = \displaystyle\int_0^1 (1 - t)\text{e}^t\,\text{d}t$.
   D'après la question précédente $u_1 = \left[2 - t)\text{e}^t\right]_0^1 = \text{e} - 2$.

2. $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

En posant $u(t) = (1-t)^{n+1}$ $\quad \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t$
$\mathrm{d}u = -(n+1)(1-t)^n$ $\quad v = \mathrm{e}^t$

Toutes ces fonctions étant continues et dérivables, en intégrant par parties :

$u_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\right]_0^1 + (n+1)\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -1+(n+1)u_n.$

Partie B

Il semble avec la première calculatrice que la suite (u_n) converge vers 0, mais la deuxième conduit à penser que celle-ci est divergente...

Partie C

1. On a $0 \leqslant t \leqslant 1$, donc $1-t \geqslant 0$, $(1-t)^n \geqslant 0$ et $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}$. Donc $(1-t)^n\mathrm{e}^t \geqslant 0$.
Conclusion l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ est positive et $u_n \geqslant 0$.

2. a. On a vu que $0 \leqslant t \leqslant 1 \longleftrightarrow \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \longleftrightarrow (1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}\times(1-t)^n$.

b. En « intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[0;1]$, on a

$u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}\times(1-t)^n \iff u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}[-(1-t)]_0^1$ et finalement :

$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

3. On a donc démontré au **1.** et au **2. b.** que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

Par application du théorème des « gendarmes », la limite de u_n au voisinage de plus l'infini est égale à zéro.

Partie D

1. • *Initialisation* : $v_1 = u_1 + 1!(a+2-\mathrm{e}) = \mathrm{e}-2+a+2-\mathrm{e} = a$; la relation est vraie au rang 1.

• *Hérédité* : soit un naturel $n \geqslant 1$ et supposons la relation vraie à ce rang n, soit $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$.

Calculons $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1 = (n+1)[u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})] = u_{n+1} + 1 + (n+1)!(a+2-\mathrm{e}) - 1 = u_{n+1} + (n+1)!(a+2-\mathrm{e})$ qui démontre l'hérédité.

La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang supérieur ou égal à 1, elle est vraie au rang $n+1$; on a donc démontré par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $\ v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$.

2. On rappelle que $u_n \geqslant 0$.

– Si $a+2-\mathrm{e} > 0 \iff a > \mathrm{e}-2$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n!)(a+2-\mathrm{e}) = +\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

– Si $a+2-\mathrm{e} < 0 \iff a < \mathrm{e}-2$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n!)(a+2-\mathrm{e}) = -\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

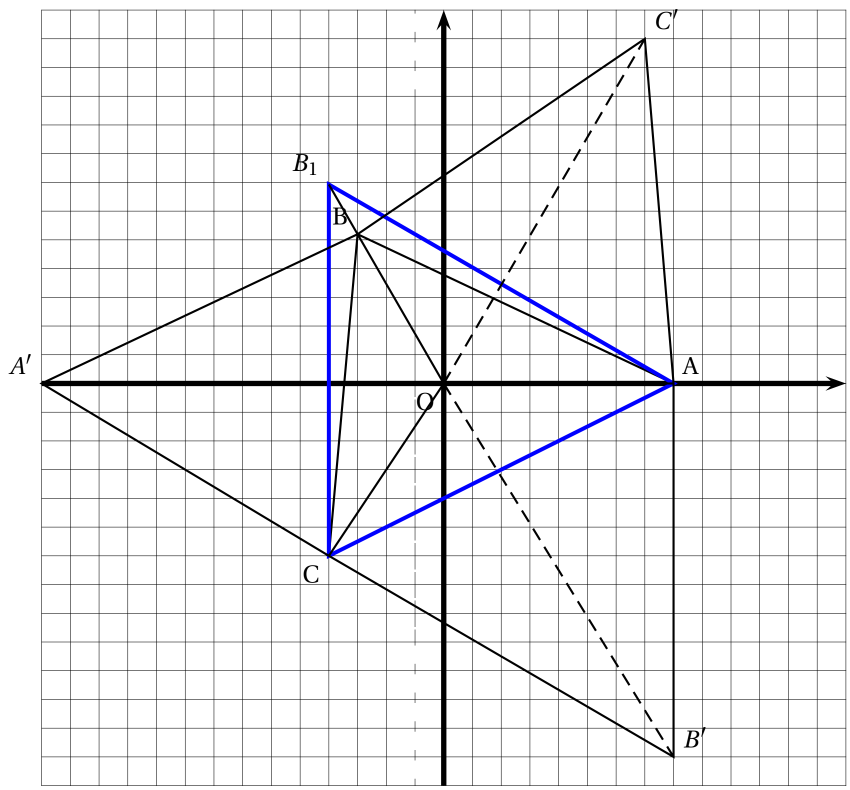
– Si $a+2-\mathrm{e} = 0 \iff a = \mathrm{e}-2$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n!)(a+2-\mathrm{e}) = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. L'explication de la divergence des résultats des deux calculatrices provient sûrement de la valeur initiale de e -2.

On a e $\approx 2{,}718\,281\,828\,459\,0$. On ne connait pas la douzième décimale de la première calculatrice, mais il y a toutes les raisons de penser que c'est 9 alors que la onzième décimale de la deuxième calculatrice est fausse (6 au lieu de 5), d'où la divergence vers $+\infty$ car on est dans le premier cas de la question **2.**

EXERCICE 4 **5 points**

1. Figure



2. On a $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{j}^2 = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a. On sait que $a' - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-c) \iff$

$a' = 8\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[6\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$

$-4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3} + \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 + 7\sqrt{3}\right) = -4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{21}{2} + \dfrac{7\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} =$

$-4 - 10 = -14.$

b. De même $b' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a) \iff b' = 8 + \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3} - 8\right) =$

$8 - 6 + 6 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 6\mathrm{i}\sqrt{3} = 8 - 8\mathrm{i}\sqrt{3} = 16\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$

On en déduit que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{O}B'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}B'}\right) = -\arg b + \arg b' =$
$-\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = -\pi \quad [2\pi].$

Cette égalité montre que les points O, B et B' sont alignés.

c. En admettant que $c' = 7+7\mathrm{i}\sqrt{3} = 7\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

On démontre de même qu'au **b.** que

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{O}C'}\right) = \pi$$

qui démontre que O, C et C' sont alignés.

Autre méthode : $\mathrm{C}\left(-4\,;\,-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ et $C'\left(7\,;\,-7\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$. On a de façon évidente $\overrightarrow{\mathrm{O}C'} = -\dfrac{7}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ qui montre que C' appartient à la droite (OC).

Enfin les affixes de A et A'sont réelles, donc ces points sont alignés avec O.

Conclusion : les droites $(\mathrm{A}A')$, $(\mathrm{B}B')$ et $(\mathrm{C}C')$ contenant toutes le point O sont concourantes en ce point.

3. a. $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC} = |a|+|b|+|c| = 8+6+8 = 22$.

b. $\mathrm{j}^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$.

$1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2$

Méthode 1 : soit B_1 le point d'affixe 8j. Les points A, B_1 et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 8.

Le triangle $\mathrm{AB_1C}$ est un triangle équilatéral (trois angles inscrits de $\dfrac{\pi}{3}$).
Le point O est le centre de gravité de ce triangle, donc l'isobarycentre.
L'égalité $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0}$ se traduit en affixes par : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.
Méthode 2 : $\mathrm{j}\left(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right) = \mathrm{j}+\mathrm{j}^2+\mathrm{j}^3 = \mathrm{j}+\mathrm{j}^2+1$.
Or $\mathrm{j}\left(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right) = 1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 \iff \left(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right)(\mathrm{j}-1) = 0$. Comme $\mathrm{j}\neq 1$ il en résulte que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.

Méthode 3 : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 1-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

c. $\left|(a-z)+(b-z)\mathrm{j}^2+(c-z)\mathrm{j}\right| = \left|a-z+b\mathrm{j}^2-z\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}-z\mathrm{j}\right| =$
$\left|a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}-z\left(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right)\right| = \left|a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}\right|$ (d'après la question précédente.)
Or $\left|a+b\mathrm{j}^2+c\mathrm{j}\right| = \left|8+6\mathrm{j}\mathrm{j}^2+8\mathrm{j}^2\mathrm{j}\right| = |8+6+8| = |22| = 22$.

d. D'après l'inégalité triangulaire admise :
$\left|(a-z)+(b-z)\mathrm{j}^2+(c-z)\mathrm{j}\right| \leqslant |a-z|+|(b-z)\mathrm{j}^2|+|(c-z)\mathrm{j}|$.
Or $|(b-z)\mathrm{j}^2| = |b-z|$ et $|(c-z)\mathrm{j}| = |c-z|$.
Donc $\left|(a-z)+(b-z)\mathrm{j}^2+(c-z)\mathrm{j}\right| \leqslant M\mathrm{A}+M\mathrm{B}+M\mathrm{C}$ soit d'après **c.**
$22 \leqslant M\mathrm{A}+M\mathrm{B}+M\mathrm{C}$.
D'après **a.** $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC} = 22$. Donc la valeur minimale de $M\mathrm{A}+M\mathrm{B}+M\mathrm{C}$ est atteinte quand $M = \mathrm{O}$.

EXERCICE 4 (SPÉCIALITÉ) 5 points

1. a. L'algorithme d'Euclide donne :
$226 = 2\times 109+8,\quad 109 = 13\times 8+5,\quad 8 = 1\times 5+3$
$5 = 1\times 3+2,\quad 3 = 1\times 2+1,\quad 2 = 2\times 1+0$.
Le dernier reste non nul étant égal à 1 le pgcd de 109 et 226 est égal à 1.
109 et 226 sont premiers entre eux et l'équation (E) admet au moins une solution.

b. En remontant les égalités du **a.** :
$3 = 1\times 2+1 \iff 1 = 3-1\times 2 \iff 1 = 3-1\times(5-3) \iff 1 = 2\times 3-5$
$\iff 1 = 2(8-5)-5 \iff 1 = 2\times 8-3\times 5$
$\iff 1 = 2\times 8-3(109-13\times 8) \iff 1 = 41\times 8-3\times 109$
$\iff 1 = 41\times(226-2\times 109)-3\times 109 \iff 1 = 41\times 226-85\times 109$.

Donc le couple $(-85\,;\,-41)$ est une solution particulière de l'équation (E).

On a $(x\,;\,y)$ étant un couple solution quelconque de (E)

$\begin{cases} 109x-226y &= 1 \\ 109\times(-85)-226\times(-41) &= 1 \end{cases} \Longrightarrow 109(x+85)-226(y+41)=0 \Longleftrightarrow$

$109(x+85)=226(y+41) \quad (1).$

D'après le **a.** 109 divise $226(y+41)$, mais étant premier avec 226 divise $y+41$ (d'après le théorème de Gauss) ; il existe donc un entier k' tel que : $y+41=109k' \Longleftrightarrow y=-41+109k'$ et en reportant dans (1)

$109(x+85)=226\times 109k' \Longleftrightarrow x+85=226k' \Longleftrightarrow x=-85+226k'$.

En posant $k=k'+1$, on obtient $x=-85+226+226k=141+226k$ et

$y=-41+109+109k=68+109k$.

Inversement $109(141+226k)-226(68+109k)=109\times141-226\times68=1$ (2).

Conclusion : les couples solutions de l'équation (E) sont les couples d'entiers $(141+226k\,;\,68+109k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Si $x=d$ avec $0<d\leqslant 226$ il existe un entier k tel que

$0<141+226k\leqslant 226 \Longleftrightarrow -141<226k<85 \Longleftrightarrow -\dfrac{141}{226}<k\leqslant\dfrac{85}{226}$.

Or $-\dfrac{141}{226}\approx -0,6$ et $\dfrac{85}{226}\approx 0,4$. Conclusion $k=0$. Donc $d=141$ et par conséquent $e=68$.

2. Ni 2, ni 3, ni 5, ni 5, ni 7, ni 11, ni 13, ni 17 ne divisent 227 et $17^2>227$. Donc 227 est un naturel premier.

3. On a $\text{A}=\{a\in\mathbb{N} : 0\leqslant a\leqslant 226\}$.

Par définition de f, $\quad a^{109}\equiv f(a)\quad[227]$ et par définition de g, $a^{141}\equiv g(a)\quad[227]$.

a. On a bien sûr $f(0)=0$ et $g(0)=0$. Donc $g[f(0)]=g(0)=0$.

b. D'après le petit théorème de Fermat et 227 étant premier, $a^{226}\equiv 1\quad[227]$.

c. On sait déjà que $g[f(0)]=0$.

Si $a\neq 0$, $\quad g[f(a)]\equiv[f(a)]^{141}\quad[227]$ ou encore $[g[f(a)]\equiv\left(a^{109}\right)^{141}\quad[227]$, soit $[g[f(a)]\equiv\left(a^{109\times141}\right)\quad[227]$. Or d'après la vérification (2) ci-dessus on a $109\times141=1+226\times68$.

Donc $[g[f(a)]\equiv a^{1+226\times68}\quad[227] \Longleftrightarrow [g[f(a)]\equiv a\times a^{226\times68}\quad[227] \Longleftrightarrow$ $[g[f(a)]\equiv a\times\left(a^{226}\right)^{68}\quad[227]$.

Mais d'après le **b.** $a^{226}\equiv 1\quad[227]$.

Donc finalement $g[f(a)]\equiv a\quad 227$. Finalement dans tous les cas,

$g[f(a)]=a$ si $a\in\text{A}$.

La même démonstration permet de montrer que $f[g(a)]=a$.