

∞ Corrigé du baccalauréat S Liban juin 2007 ∞

EXERCICE 1

6 points

1. a. Signe de $\ln x(1 - \ln x)$: on fait un tableau de signes :

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$1 - \ln x$		+		0
$\ln x(1 - \ln x)$		-	0	+

- b. On a $f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2 = \ln x(1 - \ln x)$. On déduit du tableau précédent que \mathcal{C} est au dessous de \mathcal{C}' sauf entre 1 et e.
2. $M(x; \ln x)$ et $N(x; (\ln x)^2)$.

- a. On a déjà vu que $h(x) = \ln x(1 - \ln x)$.

Cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \ln x = \frac{1}{x}(1 - 2 \ln x)$

qui est du signe de $1 - 2 \ln x$. Cette différence s'annule pour $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Sur $]0; \sqrt{e}[$, $h'(x) > 0$, donc h est croissante;

Sur $]\sqrt{e}; +\infty[$, $h'(x) < 0$, donc h est décroissante;

- b. Le résultat précédent montre la fonction h a un extremum (la dérivée s'annule en changeant de signe), qui est un maximum pour $x = \sqrt{e}$.

Comme ce nombre est entre 1 et e, (car $1 < e < e^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{e} < e$) le nombre $h(x)$ est positif.

$$\text{Donc } MN = h(\sqrt{e}) = \ln \sqrt{e}(1 - \ln \sqrt{e}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

- c. L'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ est équivalente à $-h(x) = 1 \Leftrightarrow h(x) = -1$. On pose $X = \ln x$ et on résout l'équation $X^2 - X - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0.$$

On a donc deux solutions $X_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \ln x_1$ et $X_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \ln x_2$.

On a donc finalement deux solutions :

$$x_1 = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ et } x_2 = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

- d. Sur $]0; 1[\cup]e; +\infty[$ la fonction $(\ln x)^2 - \ln x$ est positive et représente donc la distance MN .

D'après la question précédente il existe deux valeurs de x pour lesquelles la distance $MN = 1$. Ce sont les réels $x_2 = a = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $x_1 = b = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, avec $a < b$.

3. a. Grâce à une intégration par parties (avec $u' = dx$ et $v = \ln x$, d'où $u = 1$ et $v' = \frac{1}{x}$, les fonctions u' et v' étant continues sur $]0; +\infty[$:

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x} \, dx = e - 0 - [x]_1^e = e - e - (-1) = 1.$$

- b. Avec $G(x) = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2]$ qui est dérivable, on a $G'(x) =$

$$(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 + x \left(\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} \right) = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 + 2 \ln x - 2 = (\ln x)^2.$$

- c. Sur l'intervalle $[1; e]$ on a vu que $\ln(x) - (\ln x)^2 \geq 0$, donc l'aire \mathcal{A} est égale à $\int_1^e [\ln x - (\ln x)^2] dx = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e g(x) dx = 1 - [G(x)]_1^e = 1 - G(e) + G(1) = 1 - e(1 - 2 + 2) + 2 = 3 - e$. (u. a.)

EXERCICE 2**6 points****Candidats ne faisant pas l'option mathématiques**

C(1 ; 1 ; 2)

- Un vecteur directeur de (d) est $\left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{2}\right)$ qui n'est manifestement pas colinéaire au vecteur $\vec{j}(0; 1; 0)$. Fausse.
- Un vecteur normal au plan (P) a pour coordonnées $(1; 0; 3)$ qui est colinéaire au vecteur précédent de (d) .
De plus $A \in (P)$. Vraie
- On a : $AB^2 = 4 + 1 + 1 = 6$, $AC^2 = 1 + 4 + 1 = 6$ et $BC^2 = 9 + 9 + 0 = 18$. ABC est donc isocèle en A.
Si \widehat{BAC} avait pour mesure $\frac{\pi}{3}$, alors le triangle serait équilatéral, ce qui est faux.
Fausse.
- On a par définition : G existe car $-1 + 1 + 1 \neq 0$, et $-\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Soit I le milieu de $[BC]$; l'égalité précédente peut s'écrire : $\vec{GI} - \vec{IA} + \vec{GI} + \vec{IB} + \vec{GI} + \vec{IC} = \vec{0} \iff -\vec{IA} + \vec{GI} = \vec{0} \iff \vec{GI} = \vec{IA} \iff G$ est le milieu de $[AG]$. Vraie
- On a vu que $BC^2 = 18 \iff BC = 3\sqrt{2}$.
La distance de C au plan P est égale à : $\frac{|1 + 6 - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5} < 3\sqrt{2}$. Donc la sphère et le plan sont sécants. Vraie

EXERCICE 2**6 points****Candidats ayant choisi l'option mathématiques**

- Cette écriture est bien celle d'une similitude directe. S'il existe un point fixe, alors $z = 2iz + 1 \iff z(1 - 2i) = 1 \iff z = \frac{1}{1 - 2i} \iff z = \frac{1 + 2i}{1 + 4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. Le centre est bien A.
$$\begin{cases} z' &= 2iz + 1 \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i &= 2i\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) + 1 \end{cases}$$
 entraîne par différence :
 $z' - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = 2i\left(z - \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right)$ ce qui entraîne en prenant les arguments que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2}$: en prenant les modules $AM' = 2AM$. Donc le rapport est égal à 2. Vraie
- Pour $z = 5$, on obtient $5 = x^2 + 2x + y^2 + 1 \iff x^2 + 2x + y^2 - 4 = 0 \iff (x + 1)^2 - 1 + y^2 - 4 = 0 \iff (x + 1)^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$ qui est l'équation du cercle de centre $(-1; 0; 5)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Fausse.
- $750 = 3 \times 25 \times 10 = 2 \times 3 \times 5^3$, donc $5^{750} = 5^{2 \times 3 \times 5^3} = \left[(5^5)^3\right]^6 = (5^{5^3})^{7-1}$. Le nombre 5^{5^3} composé uniquement de facteurs 5 n'est pas divisible par le nombre premier 7, donc d'après le petit théorème de Fermat $(5^{5^3})^{7-1} - 1$ est divisible par 7. Vrai.
- $\text{PGCD}(3n+4, 4n+3) = \text{PGCD}(3n+4, 4n-+3-3n-4) = \text{PGCD}(3n+4, n-1) = \text{PGCD}(n-1, 3n+4-3(n-1)) = \text{PGCD}(n-1, 7)$.
Or par hypothèse $n-1$ est multiple de 7, donc $\text{PGCD}(n-1, 7) = 7$. Vraie

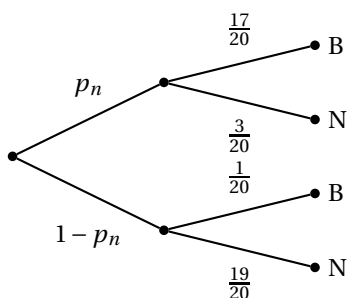
5. Si $\text{PGCD}(a, b) = 2$; alors il existe k et k' tels que $a = 2k$ et $b = 2k'$.
 L'égalité $au + bv = 2$ s'écrit alors $2ku + 2k'v = 2 \iff ku + k'v = 1$ qui signifie que u et v sont premiers entre eux. Fausse.
 Un contre exemple : $a = 3, b = 4$. On a $23 \times 3 + (-1) \times 4 = 2$ et $\text{PGCD}(3, 4) = 1$.

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. On a dans l'urne U_1 , 17 boules blanches, donc $p_2 = \frac{17}{20} = 0,85$.
 2. On peut s'aider d'un arbre. Pour obtenir p_{n+1} il faut considérer les cas où l'on a tiré au rang précédent une boule blanche :



On a donc $p_{n+1} = \frac{17}{20}p_n + (1 - p_n) \times \frac{1}{20} = \frac{16}{20}p_n + \frac{1}{20}$.
 Conclusion $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.

3. D'après la formule trouvée
 $p_3 = 0,8p_2 + 0,05 = 0,8 \times 0,85 + 0,005 = 0,68 + 0,05 = 0,73$.
4. a. Initialisation : $p_1 = 1 > 0,25$.
 Hérité : supposons qu'au rang $n_0, p_{n_0} > 0,25$, alors $0,8p_{n_0} > 0,2$ et ensuite $0,8p_{n_0} + 0,05 > 0,2 + 0,05$ ou encore $p_{n_0+1} > 0,25$.
 On a donc montré par récurrence sur n que pour tout naturel n non nul : $p_n > 0,25$.
- b. $p_{n+1} - p_n = 0,8p_n + 0,05 - p_n = -0,2p_n + 0,05$.
 Or on vient de démontrer que $p_n > 0,25$ qui entraîne $-0,2p_n < -0,2 \times 0,25$ soit $-0,2p_n < -0,05 \iff -0,2p_n + 0,05 < 0$.
 On a donc pour tout $n \geq 1, p_{n+1} - p_n < 0$, c'est-à-dire que la suite (p_n) est décroissante
- c. La suite (p_n) est décroissante et minorée par $0,25$: elle donc convergente vers un réel ℓ supérieur ou égal à $0,25$.
- d. Les suites (p_n) et (p_{n+1}) ayant la même limite ℓ , la relation de récurrence $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$ donne $\ell = 0,8\ell + 0,05 \iff 0,2\ell = 0,05 \iff \ell = \frac{0,05}{0,2} = 0,25$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,25 = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

1. $z' = \frac{2z}{|z|} - z = \frac{2re^{i\alpha}}{r} - re^{i\alpha} = 2e^{i\alpha} - re^{i\alpha} = (2 - r)e^{i\alpha}$.
 2. Avec $z = 3$, la formule précédente donne $z_{A'} = (2 - 3)e^{0i} = -1$.

3. a. B a pour affixe $b = -\sqrt{3} + i$. On a donc $|b^2| = 3 + 1 \Rightarrow |b| = 2$. On peut écrire $b = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
- b. $z_{B'} = (2-2)e^{i\frac{5\pi}{6}} = 0 = z_O$.
4. cf. figure.
5. a. Il s'agit de résoudre $z' = 0 \Leftrightarrow (2-r)e^{i\alpha} \Leftrightarrow r = 2$ ou $e^{i\alpha} = 0$. L'ensemble des points dont l'image par f est O est le cercle de centre O et de rayon 2.
- b. cf. figure.
6. Points invariants par f : on cherche les complexes z tels que $z = \frac{z}{|z|}(2 - |z|) \Leftrightarrow z|z| = 2z - z|z| \Leftrightarrow 2z|z| = 2z \stackrel{\text{car } z \neq 0}{\Leftrightarrow} |z| = 1$. L'ensemble cherché est bien le cercle \mathcal{C}_1 .
7. M a pour affixe z avec $|z| \neq 1$.
- a. D'après la question 1, l'affixe du point I est $\frac{1}{2} [re^{i\alpha} + 2e^{i\alpha} - re^{i\alpha}] = \frac{1}{2} \times 2e^{i\alpha} = e^{i\alpha}$ qui est un complexe de module 1 quel que soit α .
Le milieu I de $[MM']$ appartient à \mathcal{C}_1 .
- b. I et M ont à 2π près le même argument : ils sont donc alignés avec O et I appartient à la demi-droite $[OM)$.
- c. Construction de l'image de M_1 :
— la demi-droite $[OM)$ coupe le cercle \mathcal{C}_1 au point I ;
— il suffit de construire le point image M'_1 symétrique de M_1 autour de I.

