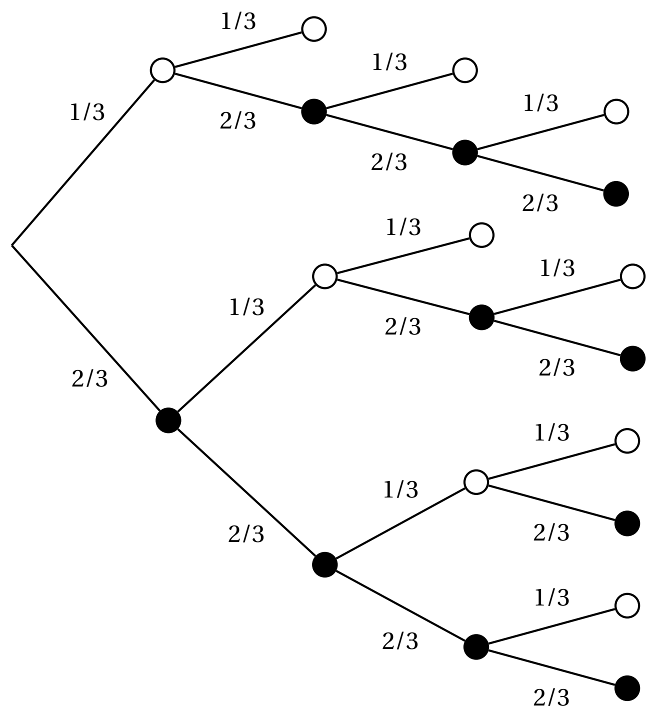
∽ Corrigé du baccalauéat S Liban mai 2003 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. À chaque tirage la probabilité de tirer une boule blanche est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, donc celle de tirer une boule noire est égale à $\frac{2}{3}$.
On peut construire le début de l'arbre en arrêtant la branche dès qu'il y a eu tirage de deux boules blanches.



On a donc $p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$

$p_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{27}$,

$p_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{4}{27}$.

2. **a.** Quel que soit n, , $B_n = \frac{1}{3}$.

b. U_n est réalisé si dans les $(n-1)$ premiers tirages il y a exactement tirage d'une boule blanche. Ce tirage peut se produire à $(n-1)$ endroits ; on a donc pour $n \geqslant 2$

$p\left(U_n\right) = (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

c. Les tirages étant indépendants, on a :

$p_n = p\left(U_n\right) \times p\left(B_n\right) = \frac{1}{3} \times (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = (n-1)\frac{1}{3^2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} =$

$(n-1)\frac{2^{n-2}}{3^n} = (n-1)\frac{1}{2^2}\frac{2^{n-2}}{3^n} = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

a. • *Initialisation*

Pour $n = 2$, $S_2 = p_2 = \frac{1}{9}$.

Or $1-\left(\dfrac{2}{2}+1\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1-2\times\dfrac{4}{9}=1-\dfrac{8}{9}=\dfrac{1}{9}$.

La relation est vraie au rang 2.

- *Hérédité* Supposons que pour n naturel $n \geqslant 2$ on ait

$S_n = 1-\left(\dfrac{n}{2}+1\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Or $S_{n+1} = S_n + p_{n+1} = 1-\left(\dfrac{n}{2}+1\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{n}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\left(\dfrac{3n}{4}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{n}{4}\right) =$

$1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{3}{2}\right) = 1-\left(\dfrac{n+1}{2}+1\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 2 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 2, elle est vraie au rang suivant : d'après le principe de récurrence la propriété est donc démontrée pour tout naturel $n \geqslant 2$.

b. On a $S_n = 1-\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Comme $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

- Limite de $\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$:

$\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{n}{2}\mathrm{e}^{n\ln\frac{2}{3}} = \dfrac{n\ln\frac{2}{3}\mathrm{e}^{n\ln\frac{2}{3}}}{2\ln\frac{2}{3}}$.

Or $\ln\frac{2}{3}<0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\dfrac{2}{3} = -\infty$.

Le numérateur est de la forme $X\mathrm{e}^X$ qui a pour limite 0 quand X tend vers $-\infty$.

Il reste finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

EXERCICE 2 **5 points**

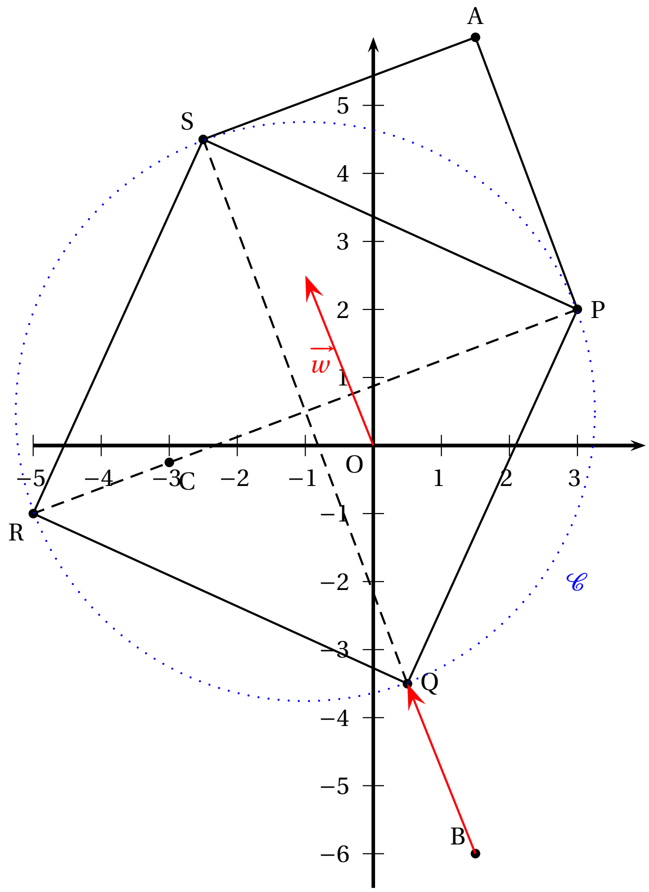
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $4z^2-12z+153=0 \iff 4\left(z^2-3z+\frac{153}{4}\right)=0 \iff 4\left[\left(z-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{153}{4}\right]=0 \iff \left(z-\frac{3}{2}\right)^2+36 = 0 \iff \left(z-\frac{3}{2}\right)^2-(6\mathrm{i})^2=0 \iff \left(z-\frac{3}{2}+6\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{3}{2}-6\mathrm{i}\right)=0$. L'équation a donc deux solutions : $\dfrac{3}{2}-6\mathrm{i}$ et $\dfrac{3}{2}+6\mathrm{i}$.

2. a. On a $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{w} \iff z_{\mathrm{Q}}-\left(\dfrac{3}{2}-6\mathrm{i}\right) = -1+\dfrac{5}{2}\mathrm{i} \iff z_{\mathrm{Q}} = \dfrac{3}{2}-1+\mathrm{i}\left(-6+\frac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}$.

b. On a $z_{\overrightarrow{\mathrm{CR}}} = -\dfrac{1}{3}z_{\overrightarrow{\mathrm{CP}}} \iff z_{\mathrm{R}}-z_{\mathrm{C}} = -\dfrac{1}{3}\left(z_{\mathrm{P}}-z_{\mathrm{C}}\right) \iff z_{\mathrm{R}} = z_{\mathrm{C}}-\dfrac{1}{3}\left(z_{\mathrm{P}}-z_{\mathrm{C}}\right) = -3-\dfrac{1}{4}\mathrm{i}-\dfrac{1}{3}\left(3+2\mathrm{i}+3+\frac{1}{4}\mathrm{i}\right) = -3-\dfrac{1}{4}\mathrm{i}-2-\dfrac{2}{3}\mathrm{i}+\frac{1}{4}\mathrm{i} = -5-\mathrm{i}$.

c. On doit avoir $z_{\overrightarrow{\mathrm{AS}}} = -\mathrm{i}z_{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}$ soit $z_{\mathrm{S}}-z_{\mathrm{A}} = -\mathrm{i}\left(z_{\mathrm{P}}-z_{\mathrm{A}}\right) \iff z_{\mathrm{S}} = z_{\mathrm{A}}-\mathrm{i}\left(z_{\mathrm{P}}-z_{\mathrm{A}}\right) = \frac{3}{2}+6\mathrm{i}-\mathrm{i}\left(3+2\mathrm{i}-\frac{3}{2}-6\mathrm{i}\right) = \frac{3}{2}+6\mathrm{i}-\frac{3}{2}\mathrm{i}-4 = -\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\mathrm{i}$.



3. **a.** [PR] a pour milieu le point de coordonnées $\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$;
[QS] a pour milieu le point de coordonnées $\left(\frac{3-5}{2}\ ;\ \frac{2-1}{2}\right) = \left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
[PR] et [QS] ont le même milieu, donc PQRS est un parallélogramme.

b. $\dfrac{z_{\text{R}} - z_{\text{Q}}}{z_{\text{P}} - z_{\text{Q}}} = \dfrac{-5 - \frac{1}{2} + \text{i} - \frac{7}{2}\text{i}}{3 + \frac{7}{2} + 2\text{i} + \frac{7}{2}\text{i}} = \dfrac{-\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\text{i}}{\frac{5}{2} + \frac{11}{2}\text{i}} = \text{i}$.

- En prenant les modules des deux membres de la relation trouvée, on obtient : $\dfrac{\text{QR}}{QP} = 1 \iff \text{QR} = \text{QP}$, donc le parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.
- En prenant les arguments des deux membres de la relation trouvée, on obtient : $\left(\overrightarrow{\text{QP}}\ ,\ \overrightarrow{\text{QR}}\right) = \frac{\pi}{2}$; donc le losange a un angle droit : c'est un carré.

c. Le carré PQRS est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ ayant pour centre le point $\Omega\left(-1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ déjà trouvé ; on a donc trouvé $\omega = -1 + \frac{1}{2}\text{i}$.
[PR] et [RS] sont deux diamètres.
$\text{PR}^2 = (3+5)^2 + (2+1)^2 = 64 + 9 = 73$, donc $\text{PR} = \sqrt{73}$. Le rayon du cercle est donc $\dfrac{\sqrt{73}}{2} \approx 4,272$

4. On a vu que SAP est rectangle isocèle en A, d'hypoténuse [PS] ; de même ωPS est un triangle rectangle isocèle en ω, d'hypoténuse [PS], donc ωSAP est un carré et (AP) est bien perpendiculaire au rayon [ωP]. Elle est donc bien tangente au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 2x_n - 1$$
$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 2y_n + 3.$$

1. • *Initialisation* Pour $n = 0$, $x_0 = 3 = 2^1 + 1$. La relation est vraie au rang 0.
   • *Hérédité* Supposons que pour $n \in \mathbb{N}*$ on ait $x_n = 2^{n-1} + 1$; on a donc $x_{n+1} = 2x_n + 1 = 2^n + 2 + 1 = 2^{n+1} + 1$: la relation est encore vraie au rang $n + 1$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n + 1$.
   Donc d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n, $\quad \mathrm{x}_n = 2^{n+1} + 1$..
2. **a.** On a donc $x_8 = 2^9 + 1 = 513$ et $x_9 = 2^{10} + 1 = 1\,025$.
   L'algorithme d'Euclide donne
   $1\,025 = 513 + 512$
   $513 = 512 + 1$
   Le dernier reste non nul est 1 ce qui signifie que x_8 et x_9 sont premiers entre eux : PGCD$(x_8\ ;\ x_9) = 1$.
   $x_{2\,002} = 2 \times 2^{2\,002} + 1$ et $x_{2\,003} = 2 \times 2^{2\,003} + 1$.
   On peut écrire $x_{2\,003}$ sous la forme :
   $x_{2\,003} = 2 \times 2^{2\,003} + 1 =$
   $x_{2\,003} = 2^{2\,003} + 2^{2\,003} + 1 =$
   $x_{2\,003} = x_{2\,002} + 2^{2\,003}$; comme $2^{2\,003} = x_{2\,002} - 1$ et que $x_{2\,002} - 1 < x_{2\,003}$, l'égalité montre que le reste de la division de $x_{2\,003}$ par $x_{2\,002}$ est 2^{2003}.
   Ensuite $x_{2\,002} = x_{2\,002} - 1 + 1$: le reste de la division de $x_{2\,002}$ par $x_{2\,002} - 1$ est égale à 1 : ceci signifie que le PGCD$(x_{2\,003}\ ;\ ) = 1$.
   $2 \times 2 \times 2^{2\,002} + 1 = 2\,(x_{2\,002} - 1) + 1 = 2x_{2\,002} + 1$.

   b. La première définition peut s'écrire : $2x_n - x_{n+1} = 1$: d'après la relation de Bezout ceci signifie que x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux.
3. **a.** • *Initialisation* Pour $n = 0$, $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$. La relation est vraie au rang 0.
   • *Hérédité* Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}*$ tel que $2x_p - y_p = 5$.
   Alors $2x_{p+1} - y_{p+1} = 2\left(2x_p - 1\right) - \left(2y_p + 3\right) = 2\left(2x_p - y_p\right) - 2 - 3 = 2 \times 5 - 5 = 5$.
   L'hérédité est démontrée.
   Quel que soit le naturel n, $\quad 2\mathrm{x}_n - y_n = 5$.

   b. Les questions 1. et 3. montrent donc que :
   $y_n = 2x_n - 5 = 2\left(2^{n+1} + 1\right) - 5 = 2^{n+2} - 3$.

   c. On a successivement :
   $2^0 \equiv 1 \mod 5$;
   $2^1 \equiv 2 \mod 5$;
   $2^2 \equiv 4 \mod 5$;
   $2^3 \equiv 3 \mod 5$;
   $2^4 \equiv 1 \mod 5$.
   Cette dernière équivalence entraîne que $2^4 \times 2^p \equiv 2^p \mod 5$, soit
   $2^{p+4} \equiv 2^p \mod 5$ c'est-à-dire que les restes de 2^p par 5 sont périodiques de période 4 et ce reste dépend du reste de la division de p par 4 :
   • Si $p = 4k + 0$ avec $k \in \mathbb{N}$, $2^p \equiv 1 \mod 5$;
   • Si $p = 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$, $2^p \equiv 2 \mod 5$
   • Si $p = 4k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$, $2^p \equiv 4 \mod 5$
   • Si $p = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$, $2^p \equiv 3 \mod 5$

   d. d_n étant diviseur commun à x_n et y_n est aussi diviseur commun à $2x_n$ et y_n et aussi de la différence $2x_n - y_n$ soit diviseur de 5.
   Donc $d_n \in \{1\ ;\ 5\}$
   Si $d_n = 5$ alors 5 divise x_n et y_n et si 5 divise x_n, alors 5 divise $2x_n - 5 = y_n$.
   Finalement $d_n = 5$ si et seulement si x_n est multiple de 5.
   Or 5 divise x_n si et seulement si $x_n \equiv 0 \mod 5 \iff 2^{n+1} + 1 \equiv 0 \mod 5 \iff 2^{n+1} \equiv 4 \mod 5$.
   Or on a vu que $2^p \equiv 4 \mod 5$ si $p = 4k + 2$, soit $n + 1 = 4k + 2 \iff n = 4k + 1$.
   Finalement $d_n = 1$, soit x_n et y_n sont premiers entre eux si et seulement si $n \neq 4k + 1$, donc si n n'est pas congru à 1 modulo 4.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire g

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x - 7.$$

1. • On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.
   • $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = +\infty$ d'où par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
2. g est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable et sur cet intervalle :
   $g'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2 = 2\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$
   g' est une somme de termes supérieurs à zéro, donc sur $\mathbb{R}$, $g'(x) > 0$: la fonction g est donc strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$. De plus $g(0) = -5$.
3. On a $g(0) = -5$ et $g(1) = 2\mathrm{e} + 2 - 5 \approx 2,4$.
   La fonction g étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0;\ 1]$ s'annule une seule fois en α avec $0 < \alpha < 1$.
   La calculatrice donne :
   $g(0,9) \approx -0,28$ et $g(1) \approx 0,4$, donc $0,9 < \alpha < 1$;
   $g(0,94) \approx -0,000\,05$ et $g(0.95) \approx 0,07$ donc $0,94 < \alpha < 0,95$, donc $0,94 < \alpha < 0,95$;
   $g(0,94) \approx -0,000\,05$ et $g(0,941) \approx 0,007$, donc $0,940 < \alpha < 0,941$.
4. La fonction g est strictement croissante et s'annule en α, donc :
   $g(x) < 0 \iff x < \alpha$ et $g(x) > 0 \iff x > \alpha$.

Partie B Étude d'une fonction

$$f(x) = (2x - 5)\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

1. On a d'une part : $2x - 5 > 0 \iff x > \frac{5}{2}$ et $2x - 5 < 0 \iff x < \frac{5}{2}$; d'autre part $1 - \mathrm{e}^{-x} > 0 \iff \mathrm{e}^{-x} < 1 \iff -x < 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) et finalement $1 - \mathrm{e}^{-x} > 0 \iff x > 0$; de même $1 - \mathrm{e}^{-x} < 0 \iff$
   $x < 0$.
   On trouve donc le signe de $f(x)$ en faisant un tableau de signes ; on en déduit :
   $$\begin{array}{lll} f(x) > 0 \iff & x < 0 \quad \text{ou} \quad x > \frac{5}{2} \\ f(x) < 0 \iff & 0 < x < \frac{5}{2} \\ f(x) = 0 \iff & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2} \end{array}$$
2. On a d'une part $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 5) = +\infty$ et d'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$, d'où par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   On a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 5) = -\infty$ et d'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = -\infty$, d'où par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
   $f'(x) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) - (2x - 5) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = 2 + (2x - 7)\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x} + (2x + 7)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left[2\mathrm{e}^x + (2x + 7)\right] = \mathrm{e}^{-x} g(x)$.
   Comme on sait que sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ vu à la partie A. On a donc le tableau de variations de f suivant :

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & - & 0 & + & \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
f & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & f(\alpha) & & \\
\hline
\end{array}$$

4. **a.** On a : $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - e^{-\alpha}\right) \quad (1)$.

Or on a vu que $g(\alpha) = 0 \iff 2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0 \iff 2 + e^{-\alpha}(2\alpha - 7) = 0 \iff e^{-\alpha} = -\dfrac{2}{2\alpha - 7}$, soit en reportant dans l'égalité (1) ci-dessus :

$$f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 + \frac{2}{2\alpha - 7}\right) = (2\alpha - 5)\left(\frac{2\alpha - 7 + 2}{2\alpha - 7}\right) = (2\alpha - 5)\frac{2\alpha - 5}{2\alpha - 7} = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}.$$

b. Comme $\frac{7}{2} \notin \left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$, la fonction h est définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$ et dans cet intervalle :

$$h'(x) = \frac{2(2x-5) \times 2 \times (2x-7) - 2(2x-5)^2}{(2x-7)^2} = \frac{2(2x-5)(4x-14-2x+5)}{(2x-7)^2} = \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}.$$

Or $x < \frac{5}{2} \Rightarrow 2x < 5 \iff 2x - 9 < -4$; donc $2x - 9 < 0$.

Donc sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$, $(2x-5)(2x-9) > 0$ et par conséquent $h'(x) > 0$: la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle étudié.

Par stricte croissante de la fonction h, on a donc : $0,94 < \alpha < 0,95 \Rightarrow f(0,94) < f(\alpha) < f(0,95)$.

La calculatrice livre : $h(0,94) \approx -1,9013 > -1,905$ et $h(0,95) \approx -1,8996 < 1,895$, donc $-1,905 < f(\alpha) < -1,895$.

5. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$d(x) = f(x) - (2x - 5) = (2x-5)\left(1 - e^{-x}\right) - (2x-5) = -(2x-5)e^{-x} = -2xe^{-x} + 5e^{-x}$.

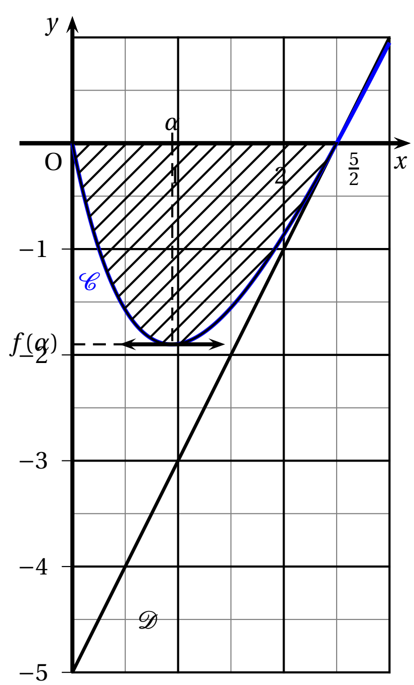
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$, donc par somme de limites :

$\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$, ce qui signifie que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x-5$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

On a $d(x) = (5-2x)e^{-x}$; son signe est celui de $5 - 2x$, d'où :

- si $x < \frac{5}{2}$, $d(x) > 0$, donc $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$;
- si $x > \frac{5}{2}$, $d(x) < 0$, donc $\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{D}$.

6.



Partie C - Calcul d'aires

Sur $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$, f est négative donc l'aire $\mathcal{A}$ est égale à l'intégrale :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} -f(x)\,dx$ en unités d'aire. Or l'unité d'aire est égale à 4 cm^2, donc en cm^2,

$\mathscr{A} = 4\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} (5-2x)\left(1-\text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x$ ou encore
$\mathscr{A} = 4\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} (5-2x)\,\text{d}x - 4\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} (5-2x)\text{e}^{-x}\,\text{d}x$.
On calcule la deuxième intégrale en posant :
$u(x) = 5-2x$ et $dv = \text{e}^{-x}$ d'où
$du = -2$ et $v = -\text{e}^{-x}$.
Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $\left[0~;~\frac{5}{2}\right]$, on peut intégrer par parties =
$\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} (5-2x)\text{e}^{-x}\,\text{d}x = \left[-(5-2x)\text{e}^{-x}\right]_0^{\frac{5}{2}} - \int_0^{\frac{5}{2}} 2\text{e}^{-x}\,\text{d}x = \left[-(5-2x)\text{e}^{-x}+2\text{e}^{-x}\right]_0^{\frac{5}{2}} = \left[(2x-3)\text{e}^{-x}\right]_0^{\frac{5}{2}} = 2\text{e}^{-\frac{5}{2}}+3.$
Donc $\mathscr{A} = 4\left[5x-x^2\right]_0^{\frac{5}{2}} - 4\left(2\text{e}^{-\frac{5}{2}}+3\right) = 50-25-12-8\text{e}^{-\frac{5}{2}} = 13-8\text{e}^{-\frac{5}{2}} \approx 12,3$ (ce que l'on vérifie approximativement sur la figure).

Partie D - Étude d'une suite de rapports de distances

1. On a donc $A_n(n~;~0)$, $B_n(n~;~2n-5)$ et $C_n(n~;~f(n))$; or on a vu que si $x > 2,5$, la courbe est au dessous de $\mathscr{D}$, donc pour $n \geqslant 3$, , $f(n) < 2n-5$.
On a donc $C_nB_n = 2n-5-f(n) = 2n-5-(2n-5)\left(1-\text{e}^{-n}\right) = (2n-5)\text{e}^{-n}$; de plus $A_nB_n = 2n-5-0 = 2n-5$.
Conclusion : $u_n = \dfrac{(2n-5)\text{e}^{-n}}{2n-5} = \text{e}^{-n}$ car $2n-5 \geqslant 1$.

2. **a.** Calculons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\text{e}^{-n+1}}{\text{e}^{-n}} = \text{e}^{-1} = \dfrac{1}{\text{e}}$.
La suite $((u_n))$ est donc géométrique de raison $\text{e}^{-1} = \dfrac{1}{\text{e}}$ de premier terme $u_3 = \text{e}^{-3}$.

b. Comme $0 < \text{e}^{-1} < 1$, on sait que la limite de la suite est égale à 0.
On pouvait prévoir ce résultat puisque la limite de A_nB_n est égale à plus l'infinie, alors que la limite de C_nB_n est égale à zéro.