Corrigé du baccalauréat S Liban mai 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(2 ; 1 ; 3), B(−3 ; −1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4).

1. $\overrightarrow{AB}(-5\,;\,-2;4)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;\,1\,;\,1)$ ne sont pas colinéaires car s'il existe k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ alors $k=-5$, $k=-2$ et $k=4$ ce qui n'est pas possible.
Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -7+2t \\ y & = & -3t \\ z & = & 4+\ t \end{array}\right.$

a. $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est une couple de vecteurs directeurs de (ABC). (d) est dirigée par $\vec{u}\,(2\,;\,-3\,;\,1)$.
$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-5)-3\times(-2)+1\times 4 = 0$ et $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 2-3+1 = 0$.
Donc (d) est orthogonale à deux droites sécantes de (ABC).
Donc la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b. $\vec{u}$ est un vecteur normal du plan (ABC). Donc (ABC) a une équation cartésienne de la forme $2x-3y+z+d=0$.
Le point A appartient à (ABC) donc $2\times 2-3+3+d=0$ soit $d=-4$.
Finalement (ABC) : $2x-3y+z-4=0$.

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a. Montrer que H est le barycentre de (A ; −2), (B ; −1) et (C ; 2).
Les coordonnées du point H vérifient le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -7+2t \\ y & = & -3t \\ z & = & 4+t \\ 2x-3y+z-4 & = & 0 \end{array}\right.$$
En utilisant la quatrième équation, on obtient : $-14+4t+9t+4+t-4=0$ soit $t=1$.
Donc $x_H=-5$, $y_H=-3$ et $z_H=5$.
D'autre part, les coordonnées du barycentre de (A ; −2), (B ; −1) et (C ; 2)
sont $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{-2\times 2-1\times(-3)+2\times 3}{-2-1+2} = -5 \\ y & = & \dfrac{-2\times 1-1\times(-1)+2\times 2}{-2-1+2} = -3 \\ z & = & \dfrac{-2\times 3-1\times(7)+2\times 4}{-2-1+2} = 5 \end{array}\right.$
On retrouve les coordonnées de H.
Donc H est le barycentre de (A ; −2), (B ; −1) et (C ; 2)

b.
$$\begin{array}{rcl} \left(-2\overrightarrow{M\mathrm{A}}-\overrightarrow{M\mathrm{B}}+2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M\mathrm{B}}-\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) & = & 0 \\ \Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{M\mathrm{H}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} & = & 0 \end{array}$$
On obtient donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{CB}$ passant par H.

c.
$$\begin{array}{rcl} \left\|-2\overrightarrow{M\mathrm{A}}-\overrightarrow{M\mathrm{B}}+2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| & = & \sqrt{29} \\ \Longleftrightarrow \left\|-\overrightarrow{M\mathrm{H}}\right\| & = & \sqrt{29} \end{array}$$
On obtient la sphère de centre H, de rayon $\sqrt{29}$

d. Γ_1 est un plan passant par le centre H de la sphère Γ_2 donc l'intersection des deux ensembles est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{29}$.

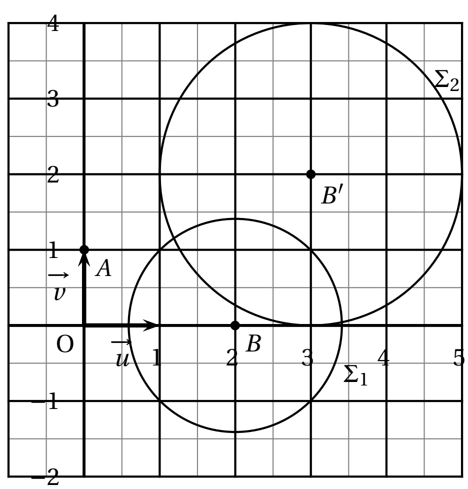
e. $\overrightarrow{SH}(3\,;\,-4\,;\,2)$ et $\overrightarrow{CB}(-6\,;\,-3\,;\,3)$
$\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{CB} = 3\times(-6) - 4\times(-3) + 2\times 3 = 0$
et $\|\overrightarrow{SH}\|^2 = 9+16+4 = 29$
Le point S vérifie les deux égalités donc il appartient à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On prendra 2 cm pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. **a.** $z_{B_1} - z_A = \sqrt{2}(z_B - z_A)$ soit $z_{B_1} = \text{i} + \sqrt{2}(2-i) = 2\sqrt{2} + \text{i}\left(1-\sqrt{2}\right)$.
   b. Déterminer l'affixe du point B′ image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
z_{B'} - z_A &= \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z_{B_1} - z_A\right)\\
z_{B'} &= \text{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\sqrt{2} + \text{i}(1-\sqrt{2}) - i\right)\\
z_{B'} &= \text{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2\sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2})\\
z_{B'} &= \text{i} + 2 - \text{i} + 2\text{i} + 1\\
z_{B'} &= 3 + 2\text{i}
\end{aligned}$$



2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1+\text{i})z + 1.$$

   a. $(1+\text{i})z_B + 1 = 2 + 2\text{i} + 1 = 3 + 2\text{i} = z_{B'}$. Donc B' est l'image de B par f.
   b. On résout $z' = z$ soit $(1+\text{i})z + 1 = z$
   On trouve $\text{i}z = -1$ soit $z = \text{i}$.
   Donc A est le seul point invariant par f.

c. $\dfrac{z'-z}{\mathrm{i}-z}=\dfrac{(1+\mathrm{i})z+1-z}{\mathrm{i}-z}=\dfrac{\mathrm{i}z+1}{\mathrm{i}-z}=\dfrac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{\mathrm{i}-z}=-\mathrm{i}$.

Cela signifie que $MM'=AM$ et que $\left(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MM'}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

On trace le cercle de centre M passant par A. On trace ensuite la perpendiculaire à (MA) passant par M : M' est le point d'intersection du cercle et de la droite tel que $\left(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MM'}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

3. a. $BM=\sqrt{2}$ donc Σ_1 est le cercle de centre B de rayon $\sqrt{2}$.

b. $z'-3-2\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})z+1-3-2\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})(z-2)$.

Si M appartient à Σ_1, alors $|z-2|=\sqrt{2}$ donc $|z-3-2\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}|\sqrt{2}=2$.

Alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, de centre B' d'affixe $3+2i$ et de rayon 2

c. cf. ci-dessus.

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x)=x\ln(x+1).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. a. f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$.

Or $x+1\geqslant 1$ donc $\ln(x+1)\geqslant 0$. Donc f' est positive sur $[0~;~+\infty[$ comme somme de fonctions positives.

f est croissante sur $[0~;~+\infty[$.

b. $f'(0)=0$ et $f(0)=0$

Donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O.

2. On pose $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

a. En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}.$$

b. $I=\displaystyle\int_0^1 x-1+\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\left[\dfrac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]_0^1=\ln 2-\dfrac{1}{2}$

3. f est positive donc l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x=0,\ x=1$ et $y=0$ est $\mathscr{A}=\displaystyle\int_0^1 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x)=\ln(x+1)$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

u et v sont dérivables sur $[0~;~1]$ et leurs dérivées : $u'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ et $v'(x)=x$ sont continues sur $[0~;~1]$.

$\mathscr{A}=\left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^2}{2(x+1)}\,\mathrm{d}x$ soit $\mathscr{A}=\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

4. f est continue et strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$, $f(0)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. $0,25\in[0~;~+\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0,25$ admet une seule solution α sur $[0~;~+\infty[$.

De plus $f(1)=\ln 2\approx 0,69$ donc $\alpha\in[0~;~1]$.

$f(0,56)\approx 0,249$ et $f(0,57)\approx 0,257$ donc $0,56<\alpha<0,57$.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1. $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(x^{n+1} - x^n\right)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$
   Or, sur $[0;1]$, $x^n \geqslant 0$, $(x-1) \leqslant 0$ et $\ln(x+1) \geqslant 0$.
   L'intégrale de 0 1 conserve l'ordre donc $u_{n+1} - u_n < 0$.
   (u_n) est décroissante.
   De plus elle est positive pour les mêmes raisons que ci-dessus.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge.
2. On borne $\ln(x+1)$ sur $[0~;~1]$: $0 \leqslant \ln(x+1) \leqslant \ln 2$ puisque ln est croissante sur $]0;+\infty[$.
   On multiplie par x^n qui est positif et on détermine l'intégrale de 0 à 1 de chaque membre : l'ingalité est conservée.
   $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2 \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$
   soit $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

EXERCICE 4 **3 points**
Commun à tous les candidats

Pour commencer, $p(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$

1. $p(X > 6) = \mathrm{e}^{-6\lambda}$.
   On résout $\mathrm{e}^{-6\lambda} = 0,3$ soit $\lambda = \dfrac{\ln 0,3}{-6} \approx 0,2$
2. On résout $p(X \leqslant t) = 0,5$ soit $1 - \mathrm{e}^{-0,2t} = 0,5$.
   On trouve $t = \dfrac{\ln 0,5}{-0,2} \approx 3,5$ soit 3 ans et 6 mois.
3. On cherche $p(X > 2)$. Cela est égal à $\mathrm{e}^{-2\times 0,2}$ soit $\mathrm{e}^{-0,4}$.
4. On cherche $p_{(X\geqslant 2)}(X \geqslant 6) = \dfrac{p(X \geqslant 6)}{p(X \geqslant 2)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-6\times 0,2}}{\mathrm{e}^{-2\times 0,2}} \approx 0,45$.
5. Il s'agit d'une loi binomiale de paramètres 10 et $\mathrm{e}^{-0,4}$.
   $p = 1 - P$(« aucun robot n'a eu de panne au cours des deux premières années »).
   Donc $p = 1 - \dbinom{10}{0}\left(\mathrm{e}^{-0,4}\right)^0\left(1 - \mathrm{e}^{-0,4}\right)^{10} \approx 0,99998$.

Annexe

Exercice 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur

Courbe $(\mathscr{C})$