

## ∞ Corrigé du baccalauréat S Métropole juin 2003 ∞

### EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. a. Voir la figure à la fin.

b. Calculons  $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i-2}{1-i-2} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-1-2i}{1+1} = -i = \frac{c-a}{b-a}$ .

• L'égalité précédente donc en prenant les modules :  $\frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$  : le triangle ABC est isocèle en A.

• L'égalité précédente donne en prenant les arguments :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$  : le triangle ABC est rectangle en A.

Conclusion : Le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

2. a. D'après la première question l'angle de cette rotation est  $-\frac{\pi}{2}$ .

On a  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$  et  $AD = AC$ , donc le triangle CAD est aussi un triangle rectangle isocèle en A. Le point D est tout simplement le symétrique de B autour de A, donc  $D(3; 1)$ .  $d = 3 + i$ .

b. La rotation est une isométrie, donc l'image du cercle  $\Gamma$  est un cercle  $\Gamma'$  de même rayon.

Mais comme B et C ont respectivement pour images par la rotation les points C et D, l'image de  $\Gamma$  cercle de diamètre [BC] est le cercle  $\Gamma'$  de diamètre [CD].

3. a.  $\Gamma$  a pour centre le point  $\omega(1; 0)$ .

$M(z) \in \Gamma \iff \omega M = 1 \iff |z-1| = 1$ , donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $z = 1 + e^{i\theta}$  avec  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , puisque  $M \neq C$ .

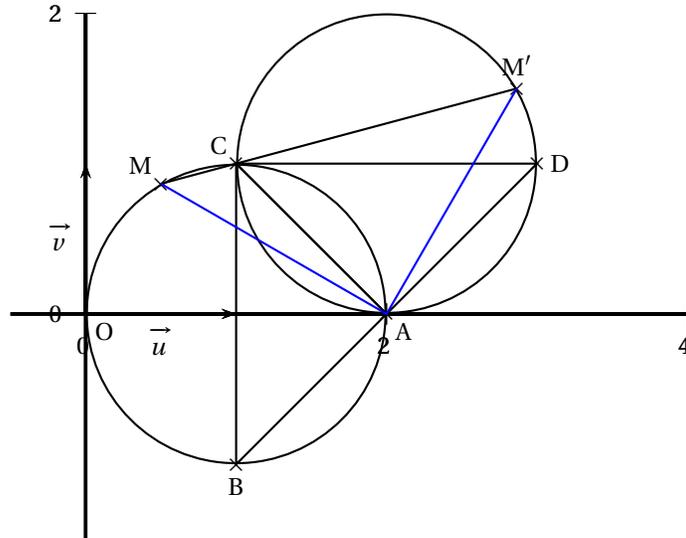
b. L'expression complexe de la rotation  $r$  est :

$$z' - 2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} (1 + e^{i\theta} - 2) \iff z' = 2 + e^{-i\frac{\pi}{2}} (1 + e^{i\theta} - 2) = 2 - i(-1 + e^{i\theta}) = 2 + i + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}.$$

c.  $\frac{z' - c}{z - c} = \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} + 1}{e^{i\theta} - i} = \frac{-\cos\theta - i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i(\sin\theta - 1)} = \frac{(-\cos\theta - i\sin\theta + 1)(\cos\theta - i(\sin\theta + 1))}{\cos^2\theta + (\sin\theta - 1)^2} = \frac{2\cos\theta}{2 - 2\sin\theta} \in \mathbb{R}$ .

On a donc  $\overrightarrow{CM'} = \frac{2\cos\theta}{2 - 2\sin\theta} \overrightarrow{CM}$  ; les vecteurs sont colinéaires, donc les points C, M et M' sont alignés.

d. M est sur le cercle  $\Gamma$ , donc M' appartient au cercle  $\Gamma'$  et M' appartient à la droite (CM) ; M' est donc à l'intersection du cercle et de la droite.



**EXERCICE 2**

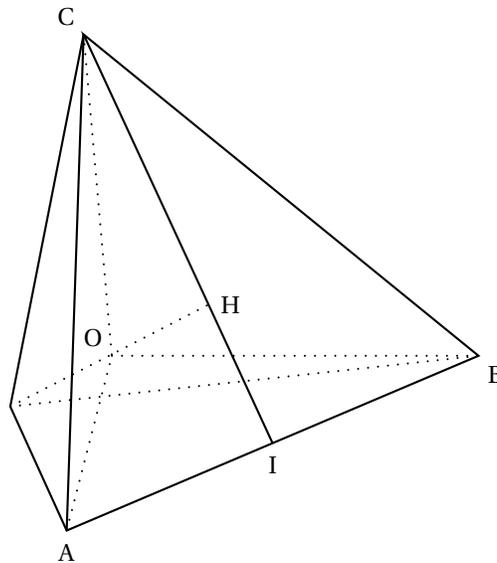
**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soient  $a$  un réel strictement positif et  $OABC$  un tétraèdre tel que :

- $OAB, OAC$  et  $OBC$  sont des triangles rectangles en  $O$ ,
- $OA = OB = OC = a$ .

On appelle  $I$  le pied de la hauteur issue de  $C$  du triangle  $ABC$ ,  $H$  le pied de la hauteur issue de  $O$  du triangle  $OIC$ , et  $D$  le point de l'espace défini par  $\vec{HO} = \vec{OD}$ .



1.  $OAB, OAC$  et  $OBC$  sont rectangles isocèles en  $O$ , donc leurs hypoténuses  $AB, AC$  et  $BC$  ont la même longueur  $a\sqrt{2}$ . Donc  $ABC$  est un triangle équilatéral.
2. •  $(CI)$  étant hauteur du triangle isocèle  $ABC$ , la droite  $(CI)$  est perpendiculaire à la droite  $(AB)$ .

$(CI)$  est aussi médiane, donc  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ; donc dans le triangle  $OAB$  isocèle en  $O$  la droite  $(OI)$  médiane est aussi hauteur donc  $(OI)$  est perpendiculaire à  $(AB)$ .

Conclusion : la droite  $(AB)$  perpendiculaire à deux droites sécantes du plan  $(OIC)$  est orthogonale à toute droite de ce plan donc en particulier à  $(OH)$ .

- $(OH)$  orthogonale aux deux droites sécantes  $(IC)$  et  $(AB)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$  donc en particulier à la droite  $(BC)$ .

$(OA)$  est orthogonale aux deux droites sécantes  $(OB)$  et  $(OC)$ , donc au plan  $(OBC)$  et en particulier à la droite  $(BC)$ .

Conclusion :  $(BC)$  est orthogonale à  $(OH)$  et à  $(OA)$  donc au plan  $(OHA)$  et en particulier à la droite  $(AH)$  qui est donc une hauteur du triangle  $(ABC)$ ;  $H$  commun à deux hauteurs du triangle  $(ABC)$  est l'orthocentre de ce triangle.

### 3. Calcul de OH

- a. On peut prendre comme base le triangle rectangle isocèle OAB et comme hauteur [OC].

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a \times a \times a = \frac{a^3}{6}.$$

On prend maintenant comme base le triangle équilatéral ABC et comme hauteur [OH]

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times CI = \frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- b. On a donc  $V = \frac{a^3}{6} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times OH \iff OH = \frac{2}{6\sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a.$

4. a. On a vu que (ABC) est équilatéral et que H en est l'orthocentre, donc aussi le centre de gravité soit l'isobarycentre des points A, B, et C. Les coordonnées de H sont donc :  $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right).$

- b. Le point D est le symétrique de H autour de O ses coordonnées sont donc :  $\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right).$

$$AD^2 = \left(a + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{16a^2}{9} + \frac{a^2}{9} = \frac{17a^2}{9} = 2a^2 = (a\sqrt{2})^2 \Rightarrow AD = a\sqrt{2}.$$

Le calcul est le même pour BD et CD, donc finalement  $AB = BC = CA = AD = BD = CD = a\sqrt{2}$  : le tétraèdre ABCD est régulier.

- c. Les points équidistants de A, de B et de C appartiennent aux plans médiateurs de [AB] et de [BC], donc à leur intersection la droite (OH).

Ce centre du cercle  $\Omega$  a donc pour coordonnées  $(x; x; x)$  et on doit avoir

$$\Omega A = \Omega D \Rightarrow \Omega A^2 = \Omega D^2 \iff (x-a)^2 + x^2 + x^2 = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 \iff$$

$$3x^2 + a^2 - 2ax = 3x^2 + \frac{a^2}{3} + 2ax \iff 4ax = \frac{2a^2}{3} \iff x = \frac{a}{6}.$$

Donc  $\Omega\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{6}\right).$

### EXERCICE 2

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. P et Q ont respectivement pour vecteur normal respectivement  $\vec{p}(1; \sqrt{3}; -2)$  et  $\vec{q}(1; 0; -1)$  vecteurs non colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles.

- b.  $M(x; y; z) \in \Delta \iff \begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$  soit en posant  $z = t$  avec  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} x + y\sqrt{3} - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ x = t \end{cases} \iff \begin{cases} t + y\sqrt{3} - 2z = 0 \\ 2t - z = 0 \\ x = t \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} t + y\sqrt{3} - 2z = 0 \\ z = 2t \\ x = t \end{cases} \iff \begin{cases} t + y\sqrt{3} - 4t = 0 \\ z = 2t \\ x = t \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = t\sqrt{3} \\ z = 2t \\ x = t \end{cases}$$

C'est l'équation d'une droite contenant l'origine et de vecteur directeur  $(1; \sqrt{3}; 2)$ .

- c. Un cône d'axe Ox a pour équation :  $y^2 + z^2 = \alpha x^2$ . Or tout point de la génératrice  $\Delta$  appartient au cône, ses coordonnées vérifient l'équation soit :  $3t^2 + 4t^2 = \alpha t^2 \iff 7 = \alpha$ .  
une équation de  $\Gamma$  est :  $y^2 + z^2 = 7x^2$ .

2. On a une équation de cercle (figure 2) si  $x = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .  
Si  $y = k$  ou  $z = k$  on obtient respectivement  $z^2 - 7x^2 = k^2$  ou  $y^2 - 7x^2 = k^2$  qui sont des équations d'hyperbole (figure 1).
3. a.  $x \equiv 0 \pmod{7}$ , alors  $x^2 \equiv 0 \pmod{7}$   
 $x \equiv 1 \pmod{7}$ , alors  $x^2 \equiv 1 \pmod{7}$   
 $x \equiv 2 \pmod{7}$ , alors  $x^2 \equiv 4 \pmod{7}$   
 $x \equiv 3 \pmod{7}$ , alors  $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$   
 $x \equiv 4 \pmod{7}$ , alors  $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$   
 $x \equiv 5 \pmod{7}$ , alors  $x^2 \equiv 4 \pmod{7}$   
 $x \equiv 6 \pmod{7}$ , alors  $x^2 \equiv 1 \pmod{7}$ .
- Ceci montre que l'équation n'a pas de solution.
- b. D'après la question précédente si  $a$  et  $b$  ne sont pas tous les deux multiples de 7, donc congrus à 0 modulo 7, alors la somme  $a^2 + b^2$  est congrue à  $0 + 1 = 1$ , ou  $0 + 4 = 4$ , ou  $0 + 2 = 2$ , ou  $1 + 1 = 2$ , ou  $1 + 4 = 5$ , ou  $1 + 2 = 3$ , ou  $2 + 2 = 4$ , ou  $2 + 4 = 6$ , ou  $4 + 4 = 8 \equiv 1$ .  
Donc en aucun cas la somme n'est divisible par 7.  
Conclusion : si 7 divise  $a^2 + b^2$  alors 7 divise  $a$  et 7 divise  $b$ .
4. a.  $A(a; b; c) \in \Gamma \iff b^2 + c^2 = 7a^2$ .  
Donc 7 divise  $b^2 + c^2$  et d'après la question précédente 7 divise  $b$  et  $c$ .  
Donc il existe  $\alpha$  et  $\beta$  entiers tels que :  
 $b = 7\alpha$  et  $c = 7\beta$ .  
On en déduit que  $49\alpha^2 + 49\beta^2 = 7a^2 \iff 7\alpha^2 + 7\beta^2 = a^2 \iff 7(\alpha^2 + \beta^2) = a^2$ , égalité qui montre que 7 divise  $a^2$ , donc divise  $a$ .  
Finalement si le point A de coordonnées  $(a, b, c)$  est un point du cône  $\Gamma$  alors  $a, b$  et  $c$  sont divisibles par 7.
- b. Soit A de coordonnées non nulles  $(a, b, c)$  un point du cône. On sait que toutes ces coordonnées sont multiples de 7. Il existe donc  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  non nuls tels que  
 $a = 7\alpha, b = 7\beta, c = 7\gamma$ , d'où  
 $\beta^2 + \gamma^2 = 7\alpha^2$ , avec un ces trois nombres non multiple de 7 (sinon on recommence), mais l'égalité trouvée a montré que les trois nombres sont multiples de 7, ce qui est en contradiction avec ce que l'on vient de dire.  
Conclusion les trois nombres  $a, b, c$  sont donc nuls. Le seul point du cône à coordonnées entières est le point  $(0; 0; 0)$  soit le sommet du cône.

**PROBLÈME**  
**Commun à tous les candidats**

**11 points**

**Partie A**

1. On sait que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions :  
 $t \mapsto f(t) = Ke^{at}$ , avec  $K \in \mathbb{R}$   
Sachant que  $f(0) = N_0 = K$ , la seule solution est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $t \mapsto f(t) = N_0e^{at}$ .
2. On a donc  $2N_0 = N_0e^{aT} \iff 2 = e^{aT} \iff \ln 2 = aT \iff a = \frac{\ln 2}{T}$  (par croissance le fonction logarithme népérien).  
Donc  $f(t) = N_0e^{at} = N_0e^{t \times \frac{\ln 2}{T}} = N_0e^{(\ln 2) \frac{t}{T}} = N_02^{\frac{t}{T}}$ .

**Partie B**

1. a. Si  $g(t) > 0$ , alors on a :

$$\begin{aligned} g'(t) = ag(t) \left[ 1 - \frac{g(t)}{M} \right] &\iff \frac{g'(t)}{g(t)} = a \left[ 1 - \frac{g(t)}{M} \right] \iff \frac{g'(t)}{g(t)} = a - a \frac{g(t)}{M} \iff \\ \frac{g'(t)}{g(t)^2} = a \frac{1}{g(t)} - a \frac{1}{M} &\iff -\frac{g'(t)}{g(t)^2} = -a \frac{1}{g(t)} + \frac{a}{M} \iff \left( \frac{1}{g(t)} \right)' + a \left( \frac{1}{g(t)} \right) = \\ \frac{a}{M} &: \text{cette égalité signifie que la fonction } \frac{1}{g} \text{ est solution de l'équation dif-} \\ \text{férentielle (E')} \quad y' + ay &= \frac{a}{M}. \end{aligned}$$

b. On a vu que  $a = \frac{\ln 2}{T}$ , donc est positif comme  $\frac{a}{M}$ ; on sait lors que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions  $t \mapsto f(t) = Ke^{-at} + \frac{1}{M}$ , avec  $K$  réel quelconque.

c. Si  $h(t) > 0$ , quel que soit le réel  $t$ , alors la fonction  $i$  définie par  $i(t) = \frac{1}{h(t)}$  est définie pour tout réel  $t$ . Elle est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$i'(t) = -\frac{h'(t)}{(h(t))^2}.$$

Or si  $h$  est solution de (E'),  $h'(t) = -ah(t) = -\frac{a}{M}$ , d'où en remplaçant dans l'expression de  $i'(t)$  :

$$\begin{aligned} i'(t) &= -\frac{1}{(h(t))^2} \left[ -ah(t) = \frac{a}{M} \right] = a \frac{h(t)}{(h(t))^2} - \frac{a}{M} \times \frac{1}{h(t)} = a \times \frac{1}{h(t)} \left[ 1 - \frac{1}{M} \times \frac{1}{h(t)} \right] = \\ ai(t) &\left[ 1 - \frac{i(t)}{M} \right]. \end{aligned}$$

Donc la fonction  $i$  est bien solution de l'équation différentielle (E').

2. a. • Limite en  $+\infty$  : comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} = 0$  (car  $a > 0$ ), on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = M$ .

• On a : quel que soit  $t$ ,  $e^{-at} > 0 \Rightarrow Ce^{-at} > 0$  (car  $C > 1 > 0$ )  $\Rightarrow 1 + Ce^{-at} > 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + Ce^{-at}} < 1 \Rightarrow \frac{M}{1 + Ce^{-at}} < M$ .

D'autre part  $g(t)$  est le quotient de deux termes supérieurs à zéro, donc  $g(t) > 0$ .

Finalement quel que soit  $t \in [0; +\infty[$ ,  $0 < g(t) < M$ .

b. Du résultat précédent, on déduit :

$$g(t) < M \Rightarrow \frac{g(t)}{M} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{g(t)}{M} > 0 \Rightarrow ag(t) \left[ 1 - \frac{g(t)}{M} \right] > 0 \iff g'(t) > 0$$

(d'après la relation (E) : la dérivée est strictement positive, la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  de  $g(0) = \frac{M}{1+C}$  à  $M$ .)

$$\text{On a } C > 1 \Rightarrow 1 + C > 2 \iff \frac{1+C}{2} > 1 \iff \frac{M}{1+C} < \frac{M}{2}.$$

$$\text{Donc } \frac{M}{2} \in \left[ \frac{M}{1+C}; M \right].$$

La fonction  $g$  continue car dérivable sur  $[0; +\infty[$  est strictement croissante de  $\frac{M}{1+C}$  à  $M$  : il existe donc un réel unique positif  $t_0$  tel que  $g(t_0) = \frac{M}{2}$ .

c. Partons de  $g'(t) = ag(t) \left[ 1 - \frac{g(t)}{M} \right]$  et dérivons les deux membres :

$$g''(t) = ag'(t) \left[ 1 - \frac{g(t)}{M} \right] + ag(t) \left[ -\frac{g'(t)}{M} \right]$$

$$g''(t) = ag'(t) \left[ 1 - \frac{g(t)}{M} - \frac{g(t)}{M} \right] = ag'(t) \left[ 1 - \frac{2g(t)}{M} \right] = a \left( 1 - \frac{2g(t)}{M} \right) g'$$

Comme  $g'(t) > 0$ , le signe de  $g''(t)$  est celui de  $1 - \frac{2g(t)}{M}$ .

$1 - \frac{2g}{M} > 0 \iff 1 > \frac{2g(t)}{M} \iff g(t) < \frac{M}{2}$ , soit  $g(t) < g(t_0) \iff t < t_0$  par croissance de la fonction  $g$ .

De même on a  $1 - \frac{2g}{M} < 0 \iff t > t_0$ .

Conclusion :  $g'$  est croissante sur  $[0 ; t_0]$  et décroissante sur  $[t_0 ; +\infty[$ .

Donc la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant  $t_0$ .

• On a vu que  $g(t_0) = \frac{M}{2}$ , soit  $\frac{M}{1 + Ce^{-at_0}} = \frac{M}{2} \iff 1 + Ce^{-at_0} = 2 \iff Ce^{-at_0} = 1 \iff e^{-at_0} = \frac{1}{C} \iff -at_0 = -\ln C \iff t_0 = \frac{\ln C}{a}$ .

d. On sait que le nombre moyen entre 0 et  $t_0$  est

$$m = \frac{1}{t_0 - 0} \int_0^{t_0} g(t) dt = \frac{1}{t_0 - 0} \int_0^{t_0} \frac{M}{1 + Ce^{-at}} dt = \frac{M}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{1}{1 + Ce^{-at}} dt = \frac{M}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{e^{at}}{e^{at} + C} dt.$$

La fonction  $t \mapsto \frac{e^{at}}{e^{at} + C}$  a pour primitive la fonction  $t \mapsto \frac{1}{a} \ln |e^{at} + C| = \frac{1}{a} \ln(e^{at} + C)$ .

$$\text{Donc } m = \frac{M}{at_0} [\ln(e^{at} + C)]_0^{t_0} = \frac{M}{at_0} [\ln(e^{at_0} + C) - \ln(e^{a \times 0} + C)] = \frac{M}{at_0} \ln \frac{e^{at_0} + C}{1 + C}.$$

Or on a vu que  $t_0 = \frac{\ln C}{a}$ , donc  $at_0 = \ln C$ , puis  $e^{at_0} = e^{(\ln C)} = C$ .

$$\text{Finalement : } m = \frac{M}{\ln C} \ln \frac{2C}{1 + C}$$

### Partie C

1. On sait que (partie A)  $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$ .

Donc  $f(0) = N_0 = 1$  et  $f(0,5) = 2^{\frac{0,5}{T}} = 2$  d'où  $\frac{0,5}{T} = 1 \iff T = 0,5$ .

D'autre part  $f(t) = N_0 e^{at}$ , donc  $f(0,5) = 2 \iff e^{0,5a} = 2 \iff 0,5a = \ln 2 \iff a = 2 \ln 2 = \ln 4$ , donc  $f(t) = e^{\ln 4 \times t} = (e^{\ln 4})^t = 4^t$ .

2.  $g(0) = N_0 = 1$  donne

$$\frac{M}{1 + C} = 1, \text{ avec } M = 100, N_0 = 100, \text{ il vient } \frac{100}{1 + C} = 1 \iff 100 = 1 + C \iff C = 99.$$

Comme  $a = \ln 4$ , on obtient :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99e^{-t \ln 4}} = \frac{100}{1 + 99 \times 4^t}.$$

3. On a  $t_0 = \frac{\ln C}{a} = \frac{\ln 99}{2 \ln 2} \approx 3,31$  au centième près.

Ce point d'abscisse  $t_0$  est un point d'inflexion de la courbe. Voir ci-dessous.

4. Le premier modèle est adapté pour des petites valeurs de  $t$ , soit à peu près sur l'intervalle  $[0 ; 1,5]$ .

Document à rendre avec la copie

Annexe I

$t$ (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction  $f$ , sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II

