Corrigé du baccalauréat STG Mercatique Centres étrangers juin 2013

Calculatrice autorisée, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
Le candidat doit traiter les quatre exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

L'annexe doit impérativement être rendue avec la copie.

EXERCICE 1 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Chaque bonne réponse rapporte un point. Aucun point n'est enlevé pour une absence de réponse ou pour une réponse inexacte.

On s'intéresse à l'évolution de la population d'une ville. En 2010, la population de cette ville était de 20 000 habitants.
On travaille avec l'hypothèse d'une baisse de 3 % par an.
On note u_n la population de cette ville en $(2010+n)$ avec cette hypothèse. On a ainsi $u_0 = 20000$.

1. La population de cette ville en 2011 était de :

   a. $\boxed{19\,400}$ habitants **b.** ~~19 700~~ habitants **c.** ~~20 600~~ habitants **d.** ~~600~~ habitants

2. On peut dire que la suite (u_n) est :

   a. ~~géométrique de raison 1,03~~ **b.** ~~arithmétique de raison −3~~

   c. $\boxed{\text{géométrique de raison 0,97}}$ **d.** ~~arithmétique de raison~~ $-\dfrac{3}{100}$

3. La population de cette ville sera inférieure à 10 000 habitants à partir de l'année :

   a. ~~2022~~ **b.** ~~2027~~ **c.** $\boxed{2033}$ **d.** ~~2050~~

4. En 2012, la population de la ville était en réalité de 19 169 habitants. La baisse moyenne annuelle entre 2010 et 2012 a été de :

   a. ~~environ 4,2 %~~ **b.** $\boxed{\text{environ 2,1 \%}}$ **c.** ~~environ 0,4 %~~ **d.** ~~environ 0,21 %~~

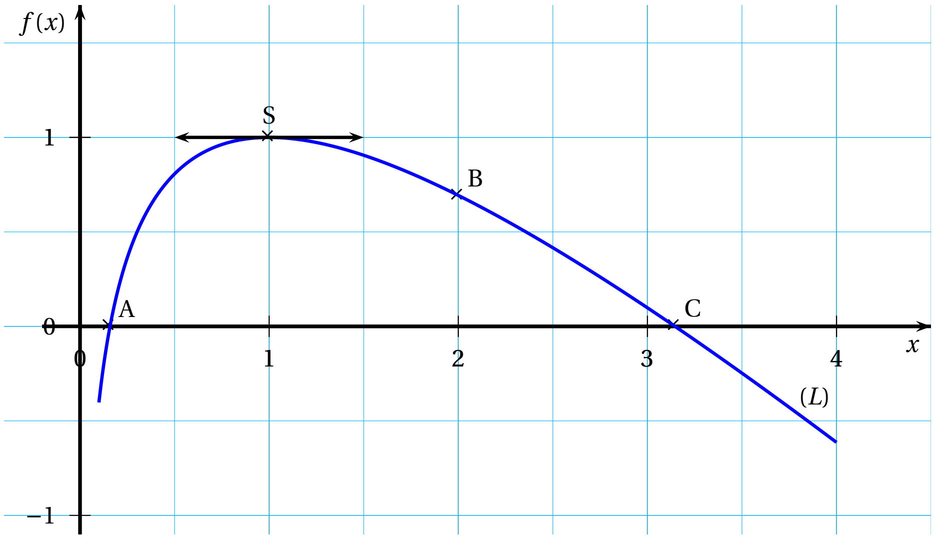
EXERCICE 2 — 5 points

Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme décimale.
Un boulanger vend des bonbons en vrac. Ceux-ci sont dans un bocal qui contient 60 % de bonbons à la banane et 40 % de bonbons au citron.
Parmi les bonbons à la banane, 35 % sont acidulés et parmi ceux au citron, 75 % sont acidulés.
Un client choisit au hasard un bonbon dans le bocal et le mange. On suppose que tous les bonbons ont la même probabilité d'être choisis.
On note :
B l'évènement : « le bonbon choisi est à la banane »,
C l'évènement : « le bonbon choisi est au citron »,
A l'évènement : « le bonbon choisi est acidulé ».
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. L'arbre pondéré, donné en annexe, qui résume la situation y est complété.
2. La probabilité que le client mange un bonbon à la banane acidulé est notée $p(B \cap A)$.
   $p(B \cap A) = p(B) \times p_B(A) = 0,6 \times 0,35 = 0,21$.
3. Calculons la probabilité de l'évènement A :
   $p(A) = p(B \cap A) + p\left(\overline{B} \cap A\right) = 0,21 + 0,4 \times 0,75 = 0,21 + 0,30 = 0,51$.
4. Sachant que le client mange un bonbon acidulé, la probabilité qu'il soit à la banane est notée $p_A(B)$.
   $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,21}{0,51} \approx 0,41$.
5. Les évènements A et B sont indépendants lorsque $p(B \cap A) = p(B) \times p(A)$.
   $p(B) \times p(A) = 0,6 \times 0,51 = 0,306$.
   Puisque $p(A \cap B) \neq p(B) \times p(A)$, les évènements ne sont pas indépendants.

EXERCICE 3 **6 points**

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,4]$ dont on a représenté ci-dessous la courbe (L) dans un repère orthogonal. La courbe (L) coupe l'axe des abscisses aux points A et C.
Elle passe par les points S et B d'abscisses respectives 1 et 2.



Partie A : lectures graphiques

graphiquement :

1. $f(1) = 1$; nous lisons l'ordonnée du point S. $f'(1) = 0$ car la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
2. $f(2) > 0$ car B est dans le demi plan des y positifs et $f'(2) < 0$ car la fonction est décroissante sur $[1\,;\,4]$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,4]$ par $f(x) = \ln(x) - x + 2$.

1. Soit R le point de coordonnées $(\mathrm{e}\,;\,3-\mathrm{e})$. Le point R appartient à la courbe (L) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe.
   Calculons l'ordonnée du point de (L) d'abscisse e.
   $y = \ln \mathrm{e} - \mathrm{e} + 2 = 1 - \mathrm{e} + 2 = 3 - \mathrm{e}$. L'ordonnée est celle de R donc il appartient à (L).
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,4]$ et l'on note f' sa fonction dérivée.
   a. $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$. Pour tout $x \in [0{,}1\,;\,4]$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$
   b. Étudions le signe de f' sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,4]$. $x \in [0{,}1\,;\,4]$ par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.
   Sur $\mathbb{R}$, $1-x > 0$ est équivalent à $x < 1$. Par conséquent si $x \in [0{,}1\,;\,1[$ alors $f'(x)$ est strictement positif et si $x \in]1\,;\,4]$ alors $f'(x)$ est strictement négatif.
   c. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
   Pour $x \in [0{,}1\,;\,1]$, $f'(x) > 0$, par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
   Pour $x \in]1\,;\,4]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Dressons le tableau de variation de f sur $[0{,}1\,;\,4]$.

x	$0{,}1$		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$\approx -0{,}4$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$2\ln 2 - 2$

3. On sait que l'abscisse de A, notée a, est environ égale à 0,158 et que celle de C, notée c, est environ égale à 3,146.

Donnons une solution de l'énigme :

« *Je suis un nombre réel* ». Appelons-le x. « *Je n'ai pas le même signe que mon logarithme népérien* (ln) ».

Puisque je suis défini sur les réels strictement positifs alors je suis inférieur à 1 car alors $\ln x$ sera négatif.

« *La différence entre moi-même et mon logarithme népérien est égale à 2* ».

Cela se traduit par $x - \ln x = 2$ ou $x - 2 - \ln x = 0$ ou $-x + 2 + \ln x = 0$. Je suis a ou 0,158.

EXERCICE 4 **5 points**

Le tableau ci-dessous donne, en millions de m^3, l'évolution de la production d'eau fournie aux parisiens entre 2002 et 2011. Les cellules des lignes 4 et 5 sont au format pourcentage arrondi à 0,1 % ».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
2	Rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Production totale annuelle en millions de m^3 (y_i)	249	246	225	217	217	208	200	199	201	197
4	Taux d'évolution par rapport à l'année précédente		−1,2 %	-8,5 %	−3,6 %	0,0 %	−4,2 %	−3,9 %	−0,5 %	1,0 %	−2,0 %
5	Taux d'évolution par rapport à 2002		−1,2 %	−9,6 %	−12,9 %	−12,9 %	−16,5 %	−19,7 %	−20,1 %	−19,3 %	−20,9 %

Source : Mairie de Paris, Direction de la propreté de l'eau, 2011.

On s'intéresse à l'évolution de la production totale annuelle d'eau.

Partie A

1. a. Le taux d'évolution t est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

$t = \dfrac{246 - 249}{249} \approx -0{,}012\,048$. Le taux d'évolution, en pourcentage, entre 2002 et 2003 est environ de $-1,2$ %.

b. Une formule qui, entrée dans la cellule D4, permet par recopie vers la droite d'afficher le contenu des cellules E4 à K4 est :

=(D$3−C$3)/C$3 ou =(D3−C3)/C3.

2. Une formule qui, entrée dans la cellule D5, permet par recopie vers la droite d'afficher le contenu des cellules E5 à K5 pour obtenir les taux d'évolution par rapport à l'année 2002 est :

=(D$3-$B$3)/$B$3 ou =(D3-$B$3)/$B$3.

Partie B

Une représentation du nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ est donnée dans un repère orthogonal en **annexe**.

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite (D) d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = -5{,}897x + 248{,}333$. Les coefficients sont arrondis à 10^{-3}.

2. Pour la suite, on prendra comme équation de la droite (D) : $y = -6x + 248$.

a. La droite (D) est tracée dans le repère figurant en annexe.

b. On estime que la tendance à la baisse observée dans la production de l'eau va encore se poursuivre durant les cinq prochaines années.

À l'aide de l'ajustement affine précédent, calculons la production totale annuelle d'eau que l'on peut estimer pour 2015.

En 2015, le rang de l'année est 14. Remplaçons x par 14 dans l'équation de la droite (D).

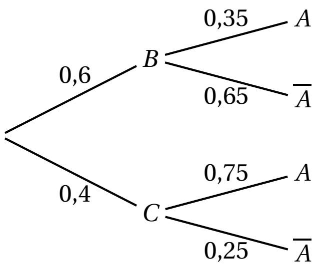
$y = -6 \times 14 + 248 = 164$.

La production totale annuelle d'eau que l'on peut estimer pour 2015 est de 164 millions de m^3.

ANNEXE

À rendre avec la copie

EXERCICE 2



EXERCICE 4