Corrigé du baccalauréat de technicien hôtellerie Métropole–La Réunion 22 juin 2015

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 **8 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = 120\mathrm{e}^{-0,17x}.$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Voir l'annexe : la droite d'équation $y = 30$ coupe la courbe en un point dont l'abscisse est à peu près égale à 8,2. L'ensemble solution est l'intervalle $[8,2\,;\,10]$
2. Sur $[0\,;\,10]$, $f'(x) = -0,17 \times 120\mathrm{e}^{-0,17x} = -20,4\mathrm{e}^{-0,17x}$.
3. O sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-0,17x} > 0$, donc $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $[0\,;\,10]$.
4. La fonction f :
   - est strictement décroissante sur $[0\,;\,10]$,
   - de $f(0) = 120$,
   - à $f(10) = 120\mathrm{e}^{-0,17\times 10} = 120\mathrm{e}^{-1,7} \approx 21,922$.

   Comme $21,922 < 30 < 120$: il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,10]$ tel que $f(\alpha) = 30$.

   La calculatrice donne :

   $f(8) \approx 30,799$ et $f(9) \approx 25,984$, donc $8 < \alpha < 9$;

   $f(8,1) \approx 30,28$ et $f(8,2) \approx 29,77$, donc $8,1 < \alpha < 8,2$;

   $f(8,15) \approx 30,28$ et $f(8,16) \approx 29,77$, donc $8,1 < \alpha < 8,2$;

   $f(8,154) \approx 30,003$ et $f(8,155) \approx 29,998$, donc $8,154 < \alpha < 8,155$.

   Conclusion $\alpha \approx 8,16$ au centième près.
5. Il faut résoudre l'inéquation :

   $120\mathrm{e}^{-0,17x} \leqslant 30 \iff 4\mathrm{e}^{-0,17x} \leqslant 1 \iff 4 \leqslant \mathrm{e}^{0,17x} \iff \ln 4 < 0,17x \iff \dfrac{\ln 4}{0,17} \leqslant x$.

   Or $\dfrac{\ln 4}{0,17} \approx 8,154\,67$.

   Les nombres solutions sont les nombres supérieurs à 8,154 67. Cela justifie le résultat de la question 1.

Partie B

1. La valeur du robot au 1er janvier 2017 est $f(3) = 120\mathrm{e}^{-0,17\times 3} = 120\mathrm{e}^{-0,51} \approx 72,595$ soit 72,60 €au centime près.

2. Le taux d'évolution de la valeur du robot entre le 1er janvier 2014 et le 1er janvier 2017 est égal à :
   $\dfrac{f(3)-(f(0)}{f(0)} = \dfrac{72,6-120}{120}\dfrac{-47,4}{120} = -0,395$, soit $-39,5\,\%$.
3. La valeur en 2020 sera égale à $f(6) = 120\mathrm{e}^{-0,17\times 6} = 120\mathrm{e}^{-1,02} \approx 43,27$.

   Une perte de 80 %, conduit à 20 % du prix initial, soit $0,20 \times 120 = 24$.

   Donc le 1er janvier 2020, le robot n'aura pas perdu 80 % de sa valeur initiale.
4. On a $f(0) = 120$, donc d'après les résultats de la partie A, la première année correspond au plus petit entier élément de l'ensemble des nombres solutions de $f(x) \leqslant 30$. Ce plus petit naturel est 9 qui correspond à l'année 2023 (2014 + 9).

EXERCICE 2 **12 points**

1.

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lcl} y & \geqslant & x\\ x+y & \geqslant & 20\\ 60x+150y & \leqslant & 2\,400\end{array}\right.$$

   a. $y \geqslant x$: le nombre des messages diffusés sur Bret'FM est supérieur ou égal à celui des messages diffusés sur Normand'FM ;

   $x+y \geqslant 20$: le nombre de messages doit être au moins de 20 ;

   $60x+150y \leqslant 2\,400$: la dépense est au maximum de 2 400 euros.

   b. On a $x+y \geqslant 20 \iff y \geqslant 20-x$;

   $60x+150y \leqslant 2\,400 \iff 150y \leqslant 2\,400-60x \iff y \leqslant \dfrac{2\,400}{-}\dfrac{60}{150} \iff$ $y \leqslant 16-0,4x$. On peut donc écrire

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lcl} y & \geqslant & x\\ y & \geqslant & 20-x\\ y & \leqslant & 16-0,4x\end{array}\right.$$

   La droite d'équation $y = 20-x$ contient les points (0 ; 20) et (20 ; 0).

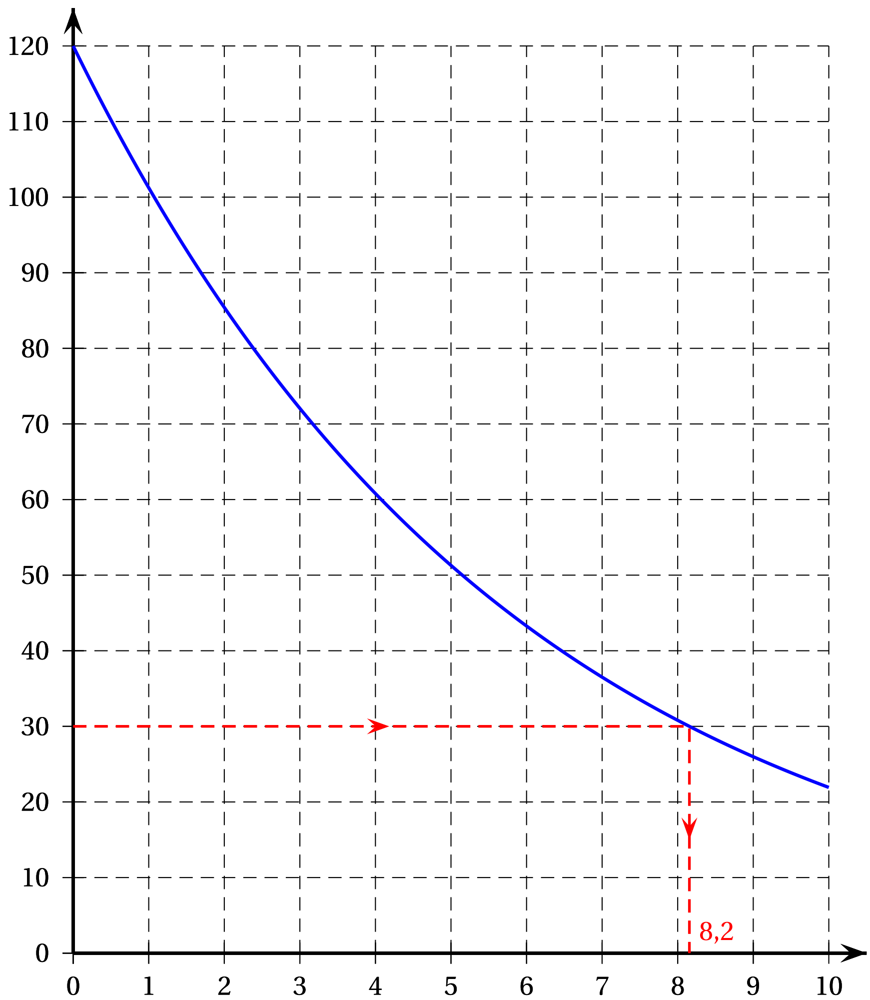
3. Voir plus bas.
4. Les huit couples de coordonnées de points du triangle autorisé sont :
   (7 ; 13), (8 ; 12), (9 ; 11), (9 ; 12), (10 ; 10), (10 ; 11), (10 ; 12), (11 ; 11).
5. **a.** Le nombre d'écoutes entre 17 et 19 h est chaque jour égal à :
   $21\,500 \times 8 + 35\,000 \times 12 = 172\,000 + 420\,000 = 592\,000$.

   b. Comme Bret'FM est la station la plus écoutée, il faut choisir le couple avec la seconde coordonnée la plus grande, donc le couple (7 ; 13) qui donne :

   $21\,500 \times 7 + 35\,000 \times 13 = 150\,500 + 455\,000 = 605\,500$ écoutes.

Annexe 1 à rendre avec la copie

Exercice 1



Annexe 2 à rendre avec la copie

Exercice 2