Corrigé du baccalauréat Métropole[1] 21 mars 2023

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B. On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\dfrac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\dfrac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\dfrac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

On sait donc que $P(A) = \dfrac{2}{5}$, $P_A(G) = \dfrac{7}{10}$ et $P(G) = \dfrac{12}{25}$.

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\dfrac{7}{10}$ **b.** $\dfrac{3}{25}$ **c.** $\dfrac{7}{25}$ **d.** $\dfrac{24}{125}$

$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{7}{25}$ **Réponse c.**

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

a. $\dfrac{1}{5}$ **b.** $\dfrac{1}{3}$ **c.** $\dfrac{7}{15}$ **d.** $\dfrac{5}{12}$

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$
D'après la formule des probabilités totales : $P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G)$ donc $P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G) = \dfrac{12}{25} - \dfrac{7}{25} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$.
$P_B(G) = \dfrac{P(B \cap G)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{3}$ **Réponse b.**

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives. On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise. On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\dfrac{12}{25}$.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès sur 10 parties ; la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

a. 0,859 **b.** 0,671 **c.** 0,188 **d.** 0,187

1. Antilles-Guyane, Maroc

> $P(X=6)=\binom{10}{6}\times\left(\dfrac{12}{25}\right)^6\times\left(1-\dfrac{12}{25}\right)^{10-6}\approx 0{,}188$ **Réponse c.**

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de 0,207. Alors :

   a. $n=2$ **b.** $n=3$ **c.** $n=4$ **d.** $n=5$

> On cherche n tel que $P(X\leqslant n)\approx 0{,}207$; à la calculatrice, on trouve $n=3$. **Réponse b.**

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

   a. $1-\left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ **b.** $\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$ **c.** $\left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ **d.** $1-\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$

> $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\left(\dfrac{12}{25}\right)^0\left(1-\dfrac{12}{25}\right)^{10-0}=1-\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$ **Réponse d.**

EXERCICE 2 — 5 points

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois. On a donc $u_0=0{,}1$.

1. Augmenter de 60 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{60}{100}=1{,}6$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q=1{,}6$.
   La forme explicite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est : $u_n=u_0\times q^n$ donc $u_n=0{,}1\times 1{,}6^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. $1{,}6>1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1{,}6^n=+\infty$
   On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}0{,}1\times 1{,}6^n=+\infty$ et donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
3. On résout l'inéquation $u_n>0{,}4$.
   $$u_n>0{,}4\iff 0{,}1\times 1{,}6^n>0{,}4\iff 1{,}6^n>4\iff \ln\left(1{,}6^n\right)>\ln(4)\iff n\times\ln(1{,}6)>\ln(4)$$
   $$\iff n>\frac{\ln(4)}{\ln(1{,}6)}$$
   Or $\dfrac{\ln(4)}{\ln(1{,}6)}\approx 2{,}95$, donc le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n>0{,}4$ est 3.
4. $u_3>0{,}4$ signifie que le nombre d'insectes dépasse 400 000 dès le 3e mois; selon ce modèle le milieu naturel n'est donc pas préservé.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation. Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par : $v_0=0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=1{,}6v_n-1{,}6v_n^2$, où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. $v_1 = 1{,}6v_0 - 1{,}6v_0^2 = 1{,}6 \times 0{,}1 - 1{,}6 \times 0{,}1^2 = 0{,}144$.
Le nombre d'insectes au bout d'un mois est donc égal à 144 000.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2$.

a. On résout l'équation $f(x) = x$.
$f(x) = x \iff 1{,}6x - 1{,}6x^2 = x \iff 0{,}6x - 1{,}6x^2 = 0 \iff x(0{,}6 - 1{,}6x) = 0$
$\iff x = 0 \text{ ou } 0{,}6 - 1{,}6x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{0{,}6}{1{,}6} \iff x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{3}{8}$

Les deux solutions appartiennent à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions dans cet intervalle : 0 et $\dfrac{3}{8}$.

b. $f'(x) = 1{,}6 \times 1 - 1{,}6 \times 2x = 1{,}6(1-2x)$
$x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ donc $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ et donc $1 - 2x \geqslant 0$.
Sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante.

3. **a.** On va montrer par récurrence que la propriété n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**
  $v_0 = 0{,}1$ et on a vu que $v_1 = 0{,}144$; on a donc $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  La propriété est donc vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On a : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et on sait que la fonction f est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$; on en déduit que : $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
  $f(0) = 0$; $f(v_n) = v_{n+1}$; $f(v_{n+1}) = v_{n+2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1{,}6 \times \dfrac{1}{2} - 1{,}6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)2 = 0{,}4$
  Donc $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ équivaut à $0 \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_{n+2}) \leqslant 0{,}4$ ce qui entraine $0 \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_{n+2}) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout n ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

On a donc démontré que, pour tout n, on a : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. On sait que :

- $v_n \leqslant v_{n+1}$ pour tout n, donc la suite (v_n) est croissante ;
- $v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n, donc la suite (v_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

La suite (v_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, on peut dire que la suite (v_n) est convergente.
On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. La suite (v_n) est croissante et admet pour limite ℓ ; donc pour tout n, on aura $v_n \leqslant \ell$. En particulier $v_1 \leqslant \ell$ donc $\ell \geqslant 0{,}1$.

La limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ donc c'est soit 0, soit $\dfrac{3}{8}$. Mais $\ell \geqslant 0{,}1$ donc ℓ ne peut être égale à 0. Donc $\ell = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

Pour tout n, on aura $v_n \leqslant \ell$, donc $v_n \leqslant 0{,}375$; il y aura donc toujours moins de 375 000 insectes. Donc, selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé.

4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

a. La fonction `seuil(a)` donne la première (et plus petite) valeur de `n` telle que `v>=a`, c'est-à-dire telle que $v_n \geqslant a$.

On a vu que $v_n \leqslant 0{,}375$ pour tout n ; il n'y a donc pas de valeur de n pour laquelle $v_n \geqslant 0{,}4$.

Le programme ne s'arrête jamais.

a. À la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 0{,}338 < 0{,}35$ et $v_6 \approx 0{,}358 \geqslant 0{,}35$; donc la valeur renvoyée par `seuil(0.35)` est 6.

Cela signifie qu'à partir du 6e mois, il y aura plus de 350 000 insectes.

EXERCICE 3 — 5 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point B(1 ; 1 ; 2) et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

b. $\overrightarrow{n_1}\,.\,\overrightarrow{n_2} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.

On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. **a.** Le plan $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc il a une équation cartésienne de la forme $x - y + z + d = 0$ où d est un réel à déterminer.

$\text{B} \in \mathscr{P}_2$ donc $x_\text{B} - y_\text{B} + z_\text{B} + d = 0$, autrement dit $1 - 1 + 2 + d = 0$ donc $d = -2$.

Le plan $\mathscr{P}_2$ a donc pour équation cartésienne $x - y + z - 2 = 0$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 0\\ y &=& -2 + t\\ z &=& t\end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$.

On cherche l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant le système : $\left\{\begin{array}{l c l}2x + y - z + 2 &=& 0\\ x - y + z - 2 &=& 0\end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{l c l}2x + y - z + 2 &=& 0\\ x - y + z - 2 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}2x + y &=& z - 2\\ x - y &=& -z + 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}3x &=& 0\\ 2x + y &=& z - 2\end{array}\right.$$

On aboutit donc à $x = 0$, $y = z - 2$ et z quelconque égal à t.

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont donc pour intersection la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 0\\ y &=& -2+t\\ z &=& t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite Δ.

On considère le point A$(1\,;\,1\,;\,1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;\,-2+t\,;\,t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. $\text{AM}_t^2 = (0-1)^2 + (-2+t-1)^2 + (t-1)^2 = 1 + \left(9-6t+t^2\right) + \left(t^2-2t+1\right) = 2t^2-8t+11$
Donc $\text{AM}_t = \sqrt{2t^2-8t+11}$.

b. Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite Δ, donc la longueur AH réalise le minimum des longueurs AM_t où M_t est un point de Δ.
Il faut donc chercher le minimum de $\sqrt{2t^2-8t+11}$, donc le minimum de $2t^2-8t+11$.
D'après les propriétés de la fonction du second degré, le minimum de $f(x) = ax^2+bx+c$ quand $a>0$, est réalisé pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ et vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
Donc le minimum de $2t^2-8t+11$ est réalisé pour $t = -\dfrac{-8}{2\times 2} = 2$, et vaut $2\times 2^2-8\times 2+11 = 3$.
On en déduit que $\text{AH} = \sqrt{3}$.

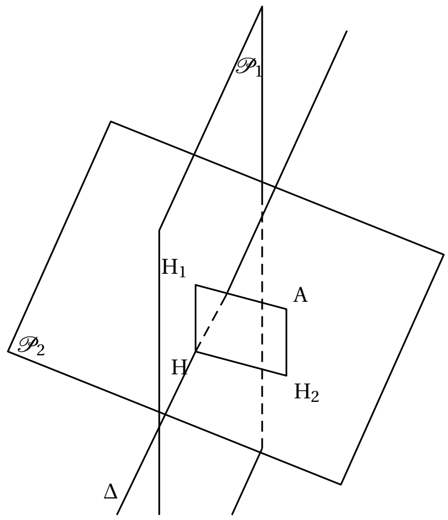
4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.
La droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ donc le vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan $\mathscr{P}_1$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$. De plus la droite $\mathscr{D}_1$ passe par le point A. Elle a donc pour représentation paramétrique :
$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& x_\text{A}+2t\\ y &=& y_\text{A}+t\\ z &=& z_\text{A}-t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1+2t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

b. La droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ donc le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}_1$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{P}_1$; ses coordonnées vérifient le système :
$$\left\{\begin{array}{r c l}x &=& 1+2t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\\ 2x+y-z+2 &=& 0\end{array}\right.$$
Donc t vérifie $2(1+2t)+(1+t)-(1-t)+2=0$, soit $2+4t+1+t-1+t+2=0$, ce qui donne $t = -\dfrac{2}{3}$.
$x = 1+2t = 1-\dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$, $y = 1+t = 1-\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ et $z = 1-t = 1+\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$
Le point H_1 a donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;0\,;2)$.
Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.



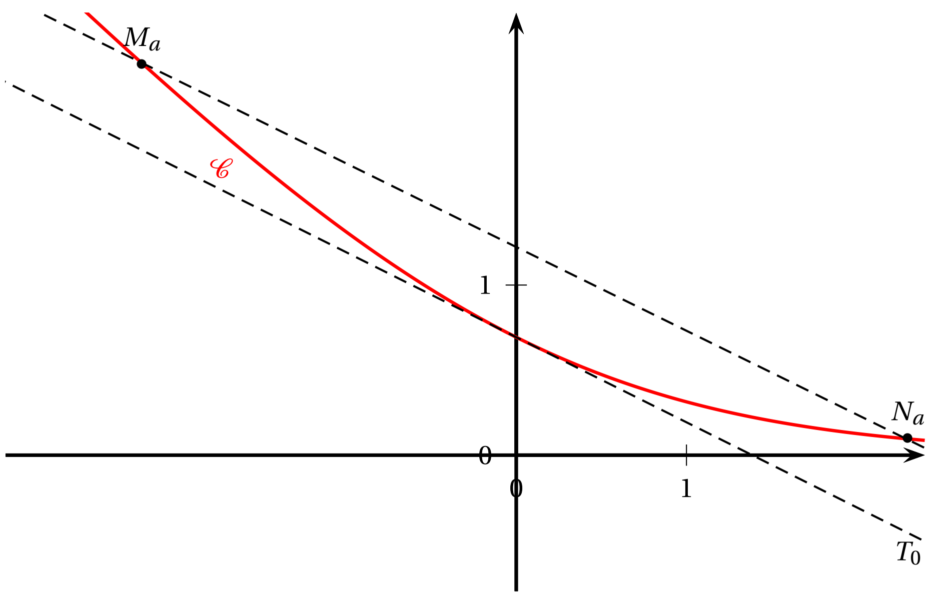
Le vecteur $\overrightarrow{AH_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}-1\\ \frac{1}{3}-1\\ \frac{5}{3}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{H_2H}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-\frac{4}{3}\\ 0-\frac{2}{3}\\ 2-\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AH_1}=\overrightarrow{H_2H}$ donc la quadrilatère AH_1HH_2 est un parallélogramme.
La droite (AH_1) est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ et H_1 appartient à ce plan ; donc (AH_1) est perpendiculaire à toutes les droites de $\mathscr{P}_1$ passant par H_1, en particulier la droite (HH_1).
Le parallélogramme AH_1HH_2 possède un angle droit donc c'est un rectangle.

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.



1. **a.** On détermine la limite de la fonction f en $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = +\infty$.
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = +\infty$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = 1$.
$\displaystyle\lim_{X\to1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
$f(x)$ est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-x}$. Sa dérivée est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc
$f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})\times\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^{x}+1} = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$

d. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) < 0$.
On dresse le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

a. La tangente T_0 a pour équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.
$f(0) = \ln\left(1+\mathrm{e}^0\right) = \ln(2)$ et $f'(0) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^0} = -\dfrac{1}{2}$
T_0 a donc pour équation : $y = -\dfrac{1}{2}x+\ln(2)$.

b. $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^x}$ donc $f''(x) = \dfrac{0-(-1)\times\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x) > 0$. donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction f est convexe, donc la courbe $\mathscr{C}$ est située au dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_0. Donc pour tout réel x, on a $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}x+\ln(2)$.

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a. On a donc : $M_a\left(-a\,;\,f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\,;\,f(a)\right)$.

a. $f(x)-f(-x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right) = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = -x$

b. La droite (M_aN_a) a pour coefficient directeur : $\dfrac{y_{N_a}-y_{M_a}}{x_{N_a}-x_{M_a}} = \dfrac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \dfrac{-a}{2a} = -\dfrac{1}{2}$

La droite T_0 a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.
Les droites T_0 et (M_aN_a) ont le même coefficient directeur donc elles sont parallèles.