

Durée : 4 heures

∞ Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion ∞
septembre 2007

EXERCICE 1

5 points

1. Restitution organisée de connaissances

P est vraie : il suffit de reprendre la définition du nombre dérivé de la fonction x^n en un point x_0 . L'application du développement de $(x_0 + h)^n$ par la formule du binôme permet de montrer que $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

Q est fausse : on a ici la dérivée d'une fonction composée et $f'(x) = nu' u^{n-1}$.

2. a. Avec $h(x) = g(\cos x)$, $h'(x) = (\cos x)' g'(\cos x) = -\sin x \times \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$.

Comme $x \in]-\pi ; 0[$, $\sin x < 0$, donc $\sqrt{\sin^2 x} = -\sin x$.

Finalement $h'(x) = \frac{-\sin x}{-\sin x} = 1$.

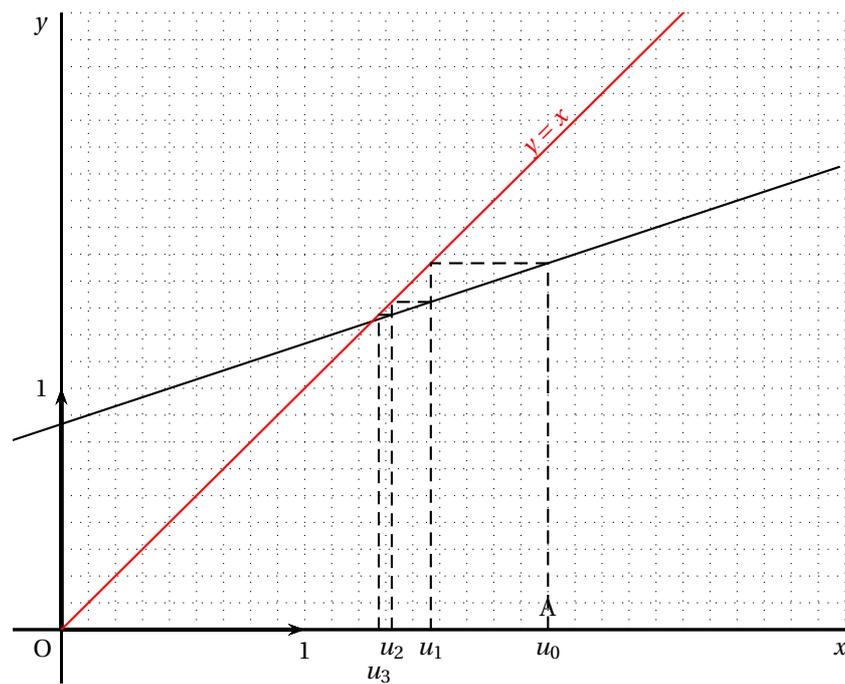
b. $h'(x) = 1$ implique $h(x) = x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = g(0) = 0$. Donc $0 = -\frac{\pi}{2} + k \iff k = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion : sur $]-\pi ; 0[$, $h(x) = x + \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2

6 points



1. a.

b. Si la suite est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

La relation $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ donne par passage à la limite $\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{23}{27} \iff$

$\frac{2}{3}\ell = \frac{23}{27} \iff \ell = \frac{23}{18}$.

c. Par récurrence :

- Initialisation : $u_0 = 2 = \frac{36}{18} \geq \frac{23}{18}$.
- Hérédité : supposons que $u_n \geq \frac{23}{18}$; alors $\frac{1}{3}u_n \geq \frac{1}{3} \times \frac{23}{18}$ soit $\frac{1}{3}u_n \geq \frac{23}{54}$.
 Puis $\frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} \geq \frac{23}{54} + \frac{23}{27} \iff u_{n+1} \geq \frac{3 \times 23}{3 \times 18} \iff u_{n+1} \geq \frac{23}{18}$.
- On a donc bien démontré que pour tout naturel n , $u_n \geq \frac{23}{18}$.

d. Monotonie :

On la démontre par récurrence :

- *Initialisation* : on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{2}{3} + \frac{23}{27} = \frac{41}{27} < \frac{54}{27} = u_0$. Donc $u_0 > u_1$.

La relation est vraie au rang 0.

— *Hérédité* :

Soit un naturel p et supposons que $u_{p-1} > u_p$. Par croissance de la fonction f sur \mathbb{R} , on a $f(u_{p-1}) > f(u_p) \iff u_p > u_{p+1}$. La relation est vraie au rang $p+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle est vraie au rang $n+1$: on a démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc minorée et décroissante : elle est donc convergente ; on sait d'après ce qui précède que la limite de cette suite est $\frac{23}{18}$.

2. a. Soit $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}$.

$$S_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\frac{1}{10} S_n = \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+2}}$$

Par différence on obtient $\frac{9}{10} S_n = \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^{n+2}} = \frac{1}{10^2} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \iff$

$$S_n = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

- b. On a $v_1 = 1,2 + 7 \times \frac{1}{10^2}$; $v_2 = 1,2 + 7 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 1,2 + 7 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{2n+1}}\right) = 1,2 + 7 \times \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1,2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$. Cette limite est bien rationnelle.

3. Suites adjacentes ?

On a vu que la suite (u_n) est décroissante.

De plus $v_{n+1} - v_n = \frac{7}{10^{n+2}} > 0$: la suite (v_n) est donc croissante.

Enfin ces deux suites ont la même limite $\frac{23}{18}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Conclusion : ces deux suites sont adjacentes.

EXERCICE 3**5 points**

1. On a $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 + 2i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3} - i + i\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} [1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)].$$

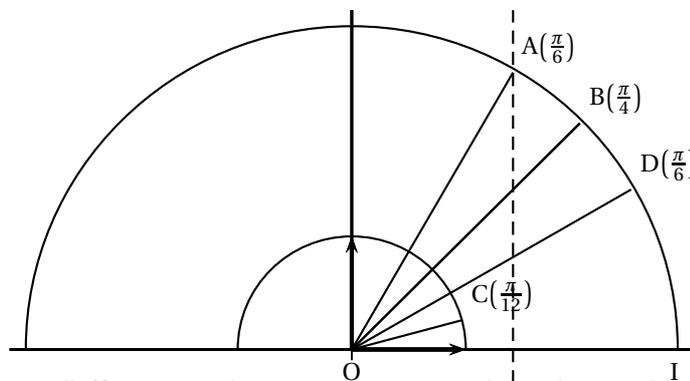
2. Modules et arguments :

- $|z_1|^2 = 2 + 6 = 8 \Rightarrow |z_1| = 2\sqrt{2}$. On a donc $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Donc $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
- On a de même $|z_2| = 2\sqrt{2}$, puis $z_2 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Donc $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
- Il suit $Z = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.
Donc $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{12} [2\pi]$.

3. On déduit des deux questions précédentes que $Z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et par identification :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

4. On place facilement le point B(2; 2) :



Le point A d'affixe z_1 est obtenu en construisant la médiatrice du segment [OI].

Le point D est obtenu en construisant la bissectrice de \widehat{IOA} .

Le point C avec la bissectrice de \widehat{IOD} et le cercle de centre O et de rayon 1.

5. Le module : $|Z^{2007}| = |Z|^{2007} = 1^{2007} = 1$.
L'argument : $\arg(Z^{2007}) = 2007 \times \frac{\pi}{12} = \frac{669\pi}{4} = \frac{672\pi - 3\pi}{4} = 2\pi - 3\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.
On a donc $Z^{2007} = e^{-\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 3

5 points

Enseignement de spécialité

1. a.

<i>a</i>	1	2	3	4	5	6
<i>y</i>	1	4	5	2	3	6
- b. On vient de voir que $5 \times 3 \equiv 1 \pmod{7}$ donc $3x \equiv 5 \pmod{7} \iff 5 \times 3x \equiv 5 \times 5 \pmod{7}$ mais comme $25 \equiv 4 \pmod{7}$ on a bien $3x \equiv 5 \pmod{7} \iff x \equiv 4 \pmod{7}$.
- c. L'équation $ax \equiv 0 \pmod{7}$ équivaut à $7 \mid ax$ mais comme 7 est premier avec a d'après le théorème de Gauss on a : $7 \mid x$.
2. a. Comme $a \times a^{p-2} = a^{p-1}$ et que a n'est pas divisible par p , d'après le petit théorème de Fermat on a $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, donc a^{p-1} est solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

- b. On a $r \equiv a^{p-2} \pmod{p}$ donc r est bien solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.

Maintenant montrons l'unicité par l'absurde.

On suppose que deux entiers r_1 et r_2 de A_p sont solutions de l'équation.

On a $ar_1 \equiv ar_2 \pmod{p} \iff a^{p-2} \times ar_1 \equiv a^{p-2} \times ar_2 \pmod{p} \iff$

$r_1 \equiv r_2 \pmod{p}$. Ainsi $r_1 - r_2$ est un multiple de p mais $r_1 - r_2$ est dans l'ensemble $\{-(p-1); -(p-2); \dots; p-1\}$, et le seul multiple de p dans cet ensemble est : 0 donc $r_1 = r_2$, ce qui montre l'unicité.

- c. On a $xy \equiv 0 \pmod{p}$ donc soit $p \mid x$ soit $p \mid y$ et x et y sont premiers entre eux et d'après le théorème de Gauss on a : $p \mid y$.

- d. On sait que le reste de la division de 2^{31-2} par 31 est l'unique solution de l'équation $2x \equiv 1 \pmod{31}$, or $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ donc $2^{25} \equiv 1 \pmod{31}$ ainsi $2^{29} \equiv 2^4 \pmod{31}$, $2^4 = 16$ est l'unique solution de l'équation $2x \equiv 1 \pmod{31}$ dans A_{31} .

On sait que le reste de la division de 3^{31-2} par 31 est l'unique solution de l'équation $3x \equiv 1 \pmod{31}$. (faire tous les calculs jusqu'à 3^{29}).

Pour la dernière équation, on factorise :

$$6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)(3x - 1) \text{ ainsi}$$

$$6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31} \iff (2x - 1)(3x - 1) \equiv 0 \pmod{31}$$

$$\iff (2x - 1) \equiv 0 \pmod{31} \text{ ou } (3x - 1) \equiv 0 \pmod{31}$$

On sait donc que les solutions de ces deux dernières équations sont dans $\mathbb{Z} : 16 + 31k$ et $21 + 31k$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'après les deux équations précédentes.

EXERCICE 4

5 points

- $(E_0) : y' + y = 1 \iff y' = -y + 1 \iff y = C^{-x} + 1$ où C est une constante réelle.
- f solution de (E) $\iff f' + (1 + \tan x)f = \cos x$
Or $f(x) = g(x) \cos x$. f est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ en tant que produit de fonctions dérivables
et $f'(x) = g'(x) \cos x - g(x) \sin x$
Ainsi f solution de E $\iff g' \cos x - g \sin x + (1 + \tan x)g \cos x = \cos x$
 $\iff g' \cos x - g \sin x + \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)g \cos x = \cos x$
 $\iff g' \cos x - g \sin x + g \cos x + g \sin x = \cos x \iff (g' + g) \cos x = \cos x$
 $\iff g' + g = 1$ car $\cos x \neq 0$ pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
 $\iff g$ est solution de (E_0) .
- f est solution de (E) donc G est solution de (E_0) . Or les solutions de (E_0) sont les fonctions du type $x \mapsto C^{-x} + 1$ et ainsi, puisque $f = g \times \cos x$, soit $f = (C^{-x} + 1) \cos x$.
De plus, $f(0) = 0 \implies (C^0 + 1) \cos 0 = 0 \implies C = -1$
 f est donc la fonction définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par $f(x) = (-e^{-x} + 1) \cos x$.