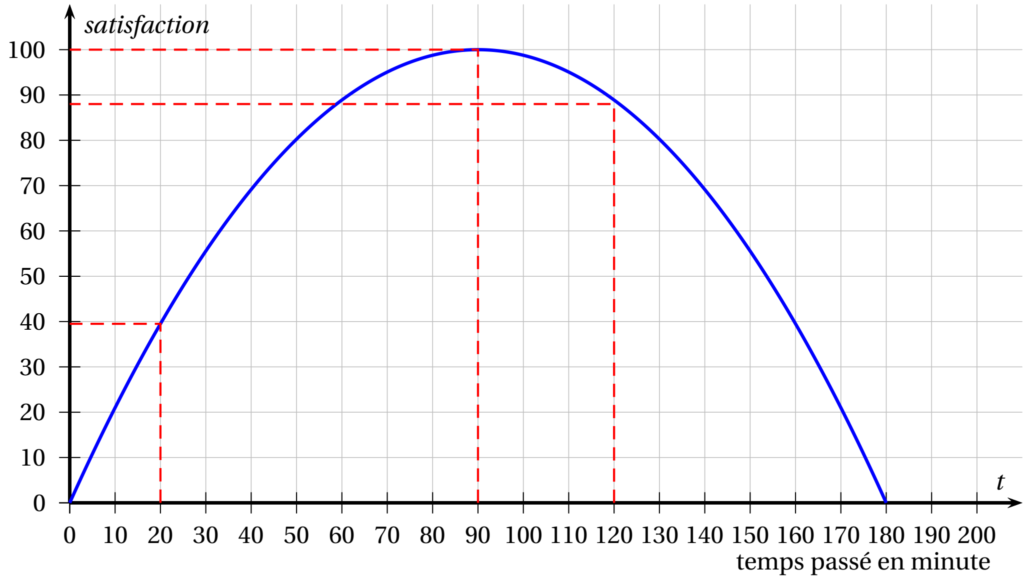
∽ Baccalauréat STMG Métropole-La Réunion ∾
Corrigé – 8 septembre 2020

EXERCICE 1 **3 points**

Dans un cadre économique, on appelle fonction de *satisfaction* toute fonction S de la variable t dont les valeurs $S(t)$ sont comprises entre 0 et 100.
On dit qu'il y a *envie* sur un intervalle lorsque la fonction de satisfaction S est croissante sur cet intervalle, sinon on dit qu'il y a rejet.
On dit qu'il y a *saturation* lorsque la fonction S prend la valeur 100.
Un client dispose de trois heures pour faire ses achats dans une zone commerciale. On modélise sa *satisfaction* en fonction de son temps de présence sur place, en minute, par la fonction de satisfaction S, définie sur l'intervalle $[0 ; 180]$, dont la courbe est donnée ci-dessous.



1. D'après le graphique : $S(20) < S(120)$ donc le client est plus satisfait au bout de 120 minutes, donc 2 heures, que de 20 minutes.

2. Il y a *saturation* quand la fonction de satisfaction atteint 100 donc pour $t = 90$ soit au bout de 1 h 30.

3. Il y a *envie* quand la fonction satisfaction est croissante, donc sur l'intervalle $[0 ; 90]$.

4. On admet que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; 180]$, $S(t) = at(180 - t)$, où a est un nombre réel.

D'après le graphique, $S(90) = 100$ ce qui équivaut à $100 = a \times 90 \times (180 - 90)$ donc $a = \dfrac{1}{81}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour essayer de prévoir le risque de défaillance des entreprises, l'économiste W. Beaver a introduit un ratio défini, pour chaque entreprise, par le quotient de la marge brute d'autofinancement par les dettes totales.
On admet que, pour une entreprise saine, ce ratio peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 0,7$ et d'écart-type $\sigma = 0,18$.

1. Pour chacune des courbes de densité ci-dessous, la droite représentée en pointillés est un axe de symétrie.

Parmi les représentations suivantes, celle qui correspond à la courbe de densité de la loi de X est la **figure 2** car elle correspond à la seule courbe symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, soit $x = 0,7$.

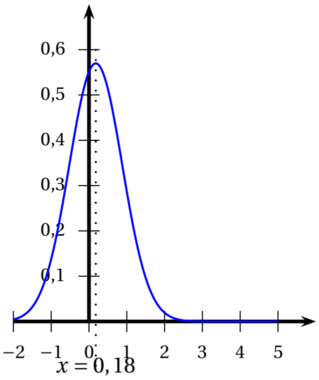


Figure 1

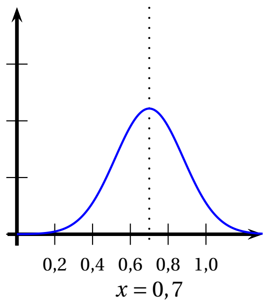


Figure 2

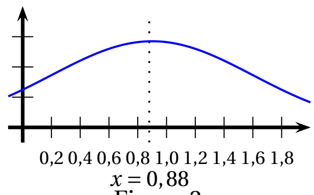
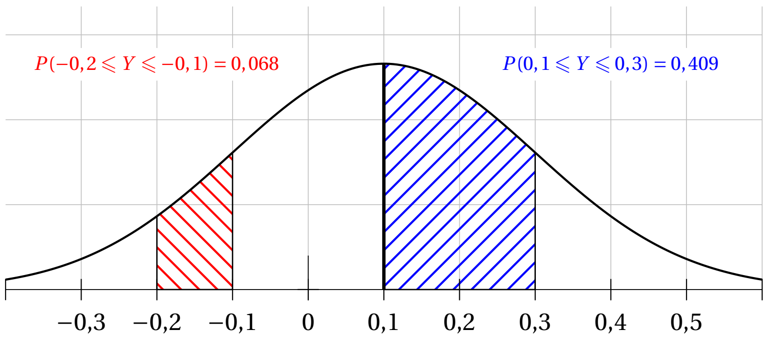


Figure 3

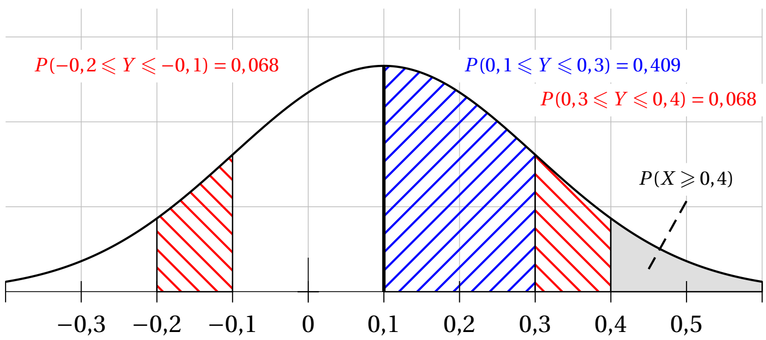
2. La probabilité qu'une entreprise saine ait un ratio compris entre 0,34 et 1,06 est $P(0,34 \leqslant X \leqslant 1,06) \approx 0,954$.
   Cela correspond à $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$.

On admet que le ratio d'une entreprise défaillante peut être modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale d'espérance $\mu = 0,1$.
On admet que $P(-0,2 \leqslant Y \leqslant -0,1) = 0,068$ et $P(0,1 \leqslant Y \leqslant 0,3) = 0,409$.

3. La courbe de densité de la loi de Y est représentée en annexe 1, à rendre avec la copie.
   Cette courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0,1$ donc on peut en déduire que $\mu = 0,1$.
   On hachure sur le graphique en rouge la zone correspondant à $P(-0,2 \leqslant Y \leqslant -0,1) = 0,068$, et en bleu celle correspondant à $P(0,1 \leqslant Y \leqslant 0,3) = 0,409$.



4. Pour des raisons de symétrie autour de la droite d'équation $x = 0,1$, on peut dire que $P(0,3 \leqslant X \leqslant 0,4) = P(-0,2 \leqslant X \leqslant -0,1)$ donc que $P(0,3 \leqslant X \leqslant 0,4) = 0,068$.



$P(0,1 \leqslant X \leqslant 0,4) = P(0,1 \leqslant X \leqslant 0,3) + P(0,3 \leqslant X \leqslant 0,4) = 0,409 + 0,068 = 0,477$.
De plus on sait que $P(X \geqslant \mu) = 0,5$ donc $P(X \geqslant 0,1) = 0,5$.
$P(X \geqslant 0,4) = P(X \geqslant 0,1) - P(0,1 \leqslant X \leqslant 0,4) = 0,5 - 0,477 = 0,023$

EXERCICE 3 **5 points**

Léo est un amateur d'*escape games*, jeux comportant la résolution de plusieurs énigmes pour réussir une mission donnée. Ses amis lui ont offert un coffret cadeau lui permettant de participer à l'*escape game* de son choix.

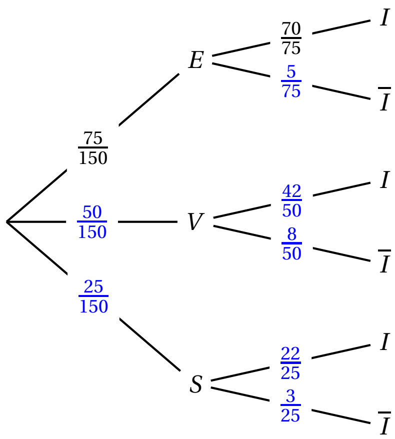
Le livret accompagnant le coffret cadeau comporte 150 pages. Chaque page correspond à un *escape game* différent dont elle précise le cadre (soit en intérieur, soit en extérieur) et la catégorie (soit enquête, soit évasion, soit science-fiction).
La moitié des pages du livret correspond à la catégorie *enquête*.
Le tiers des pages du livret correspond à la catégorie *évasion*.
Les pages restantes correspondent aux *escape games* de la catégorie *science-fiction*.

- Dans la catégorie *enquête*, 70 *escape games* se déroulent en intérieur.
- Dans la catégorie *évasion*, 42 *escape games* se déroulent en intérieur.
- Dans la catégorie *science-fiction*, 3 *escape games* se déroulent en extérieur.

Léo choisit de façon équiprobable un nombre entier entre 1 et 150. Il ouvre alors le livret à la page ayant ce nombre pour numéro.
On définit les évènements suivants :

E : « la page correspond à un *escape game* de la catégorie enquête » ;
V : « la page correspond à un *escape game* de la catégorie évasion » ;
S : « la page correspond à un *escape game* de la catégorie science-fiction » ;
I : « la page correspond à un *escape game* se déroulant en intérieur » ;
$\overline{I}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement I.

1. On complète l'arbre pondéré donné dans le texte.



2. $P\left(S\cap\overline{I}\right) = P(S)\times P_S\left(\overline{I}\right) = \dfrac{25}{150}\times\dfrac{3}{25} = \dfrac{3}{150}$.
   C'est la probabilité que la page ouverte par Léo corresponde à un *escape game* de catégorie « science-fiction » se déroulant en extérieur.
3. La probabilité que la page choisie corresponde à un *escape game* se déroulant en extérieur est :
   $P\left(\overline{I}\right) = P\left(E\cap\overline{I}\right)+P\left(V\cap\overline{I}\right)+P\left(S\cap\overline{I}\right) = \dfrac{75}{150}\times\dfrac{5}{75}+\dfrac{50}{150}\times\dfrac{8}{50}+\dfrac{25}{150}\times\dfrac{3}{25} = \dfrac{5}{150}+\dfrac{8}{150}+\dfrac{3}{150}$
   $= \dfrac{16}{150} = \dfrac{8}{75}$
4. Léo décide finalement de sélectionner une page parmi celles concernant les *escape games* se déroulant en extérieur. La probabilité que la page choisie corresponde à un *escape game* de la catégorie *science-fiction* est : $P_{\overline{I}}(S) = \dfrac{P\left(S\cap\overline{I}\right)}{P\left(\overline{I}\right)} = \dfrac{\frac{3}{150}}{\frac{8}{75}} = \dfrac{3}{150}\times\dfrac{75}{8} = \dfrac{3}{16}$

EXERCICE 4 **8 points**

Le produit intérieur brut par habitant (PIB) est une mesure de l'activité économique d'un pays.

Partie A : PIB par habitant de la zone euro

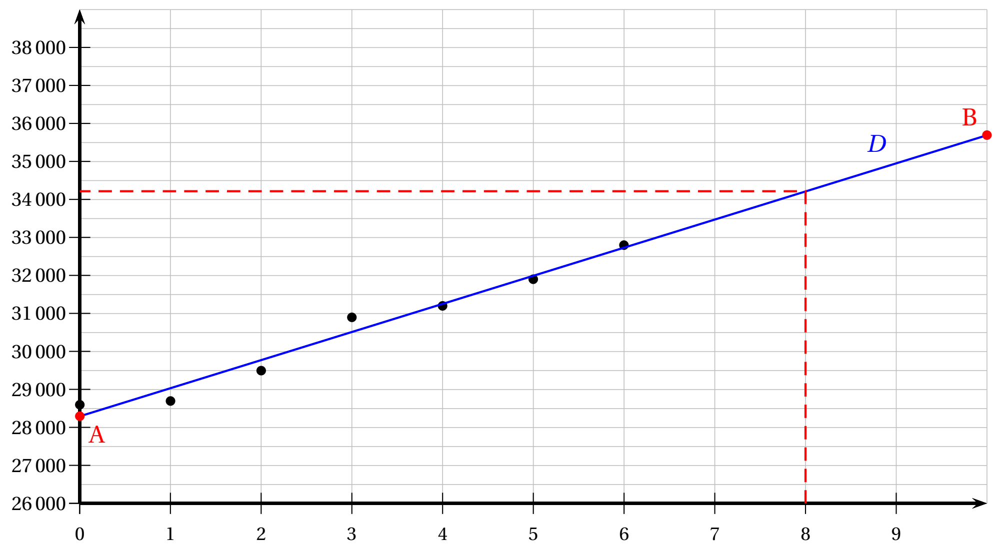
Le tableau ci-dessous donne le PIB par habitant de la zone euro, exprimé en standard de pouvoir d'achat (SPA), pour les années 2012 à 2018. Le SPA est une unité monétaire artificielle qui permet de gommer les différences de prix entre les États membres.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6
PIB par habitant de la zone euro (en SPA) : y_i	28 600	28 700	29 500	30 900	31 200	31 900	32 800

Source : https ://ec.europa.eu/eurostat/

Une représentation graphique du nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ est donnée ci-dessous.

1. On détermine à la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés : $y = 739,7x + 28297,1$
2. On décide d'ajuster le nuage de points par la droite D d'équation $y = 740x + 28300$.
   a. $y = 740x + 28300$; pour $x = 0$, $y = 28300$ et pour $x = 10$, $y = 35700$
   On place le point A (0 ; 28 300) et le point B (10 ; 35 700), puis on trace la droite (AB).



   b. L'année 2018 correspond au rang 6, donc l'année 2020 correspond au rang 8.
   Pour $x = 9$, $y = 740 \times 8 + 28300 = 34220$.
   D'après ce modèle, que l'on admet valide jusqu'en 2021, le PIB par habitant de la zone euro que l'on peut prévoir pour 2020 est de 34 220.

Partie B

Le tableau ci-dessous donne le PIB par habitant des États-Unis, exprimé en standard de pouvoir PIB par habitant des États-Unis (en SPA), pour les années 2012 à 2018.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
PIB par habitant des États-Unis d'achat (en SPA)	38 900	38 900	40 500	42 600	42 000	42 200	44 300

Source : https ://ec.europa.eu/eurostat/

1. Le taux d'évolution global du PIB par habitant des États-Unis entre 2012 et 2018 est :
   $\dfrac{44300 - 38900}{38900} \times 100 \approx 13,88\,\%$.
2. Le coefficient multiplicateur qui fait passer du taux de 2012 à 2018 est de $\dfrac{44300}{38900} \approx 1,1388$.
   Ce coefficient concerne l'évolution sur 6 ans donc le coefficient annuel moyen est d'environ $\sqrt[6]{1,1388} = 1,1388^{\frac{1}{6}} \approx 1,0219$.
   Cela correspond à un taux de $(1,0219 - 1) \times 100 = 2,19\,\%$.

3. On fait l'hypothèse que le taux d'évolution moyen annuel du PIE par habitant des États-Unis est constant et égal à 2,2 %, entre 2018 et 2035.

On modélise alors l'évolution de ce PIB par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 44\,300$. Le terme u_n représente ce PIB, exprimé en SPA, pour l'année $(2018 + n)$, où n est un entier naturel.

- **a.** Augmenter de $2,2\,\%$, c'est multiplier par $1 + \dfrac{2,2}{100} = 1,022$; la raison de la suite géométrique (u_n) est $1,022$.
- **b.** La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,022$ et de premier terme $u_0 = 44\,300$ donc, pour tout n, on a : $u_n = u_0 \times q^n = 44\,300 \times 1,022^n$.
- **c.** $2032 = 2018 + 14$ donc, d'après ce modèle, le PIB par habitant des États-Unis en 2032 peut être estimé à $u_{14} = 44\,300 \times 1,022^{14} \approx 60\,078$.

Partie C : comparaison des PIB par habitant des deux zones

1. En 2018 le PIB par habitant de la zone euro était de $32\,800$; le PIB par habitant des États-Unis était de $44\,300$.
$\dfrac{3}{4} \times 44\,300 = 33\,225 > 32\,800$
Donc en 2018 le PIB par habitant de la zone euro était inférieur aux trois quarts du PIB par habitant des États-Unis.

On fait l'hypothèse que le PIB par habitant de la zone euro augmente chaque année de 2,3 % entre 2018 et 2035 et on reprend le modèle de la **Partie B question 3** pour le PIB par habitant des États-Unis.

2. On s'interroge alors sur la possibilité que le PIB par habitant de la zone euro devienne supérieur aux trois quarts du PIB par habitant des États-Unis avant 2035.

On complète l'algorithme afin qu'il réponde à cette interrogation.

$N \leftarrow 2018$
$U \leftarrow 44\,300$
$V \leftarrow 32\,800$
Tant que $V < \dfrac{3}{4} \times U$
    $N \leftarrow N + 1$
    $U \leftarrow 1,022 \times U$
    $V \leftarrow 1,023 \times V$
Fin Tant que

3. On admet que la variable N contient la valeur $2\,032$ après exécution de cet algorithme.

C'est donc à partir de 2032 que le PIB par habitant de la zone euro deviendra supérieur aux trois quarts du PIB par habitant des États-Unis.