Corrigé du baccalauréat S Métropole 19 juin 2014

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'image de 0 par la fonction f_1 est : $f_1(0) = 0 + \mathrm{e}^{-0} = 1$.
   Le point d'abscisse 0 sur la courbe $\mathscr{C}_1$, représentative de la fonction f_1, est le point de coordonnées $\left(0\,;\, f_1(0)\right)$, c'est à dire ici $(0\,;\,1)$. Le point A, de coordonnées $(0\,;\,1)$ est donc bien un point de la courbe $\mathscr{C}_1$.
2. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbf{R}$, en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
   Sa dérivée est définie sur $\mathbf{R}$ par :
   $f_1'(x) = 1 + (-1)\mathrm{e}^{-x} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
   On a : $f_1'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x}$
   $\iff 1 \geqslant \mathrm{e}^{-x}$
   $\iff 0 \geqslant -x$, car ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$
   $\iff x \geqslant 0$.
   On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   Justifions maintenant les deux limites :
   On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$, et donc par somme :
   $\displaystyle\lim_{+\infty} f_1 = +\infty$.
   Pour tout x on a : $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \left(x\mathrm{e}^{x} + 1\right)$. Et on a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées. On en déduit, par somme : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} + 1 = 1$.
   Comme par ailleurs on a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty$, on en déduit, par produit : $\displaystyle\lim_{-\infty} f_1 = +\infty$.

Partie B

1. **a.** Soit un entier naturel n non nul, et un réel x, choisi dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   x étant dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, x est positif. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que e^{-nx} est également un nombre positif. La somme de deux nombres positifs étant elle-même positive, on en déduit que $f_n(x)$ est positif.
   On a donc prouvé que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   I_n est donc l'intégrale sur un intervalle d'une fonction positive sur cet intervalle, c'est donc l'aire (exprimée en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par : l'axe des abscisses ; la courbe $\mathscr{C}_n$, représentative de f_n, et les droites verticales d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = 1$.

b. Sur l'intervalle [0 ; 1], il semble que, plus n augmente, plus les courbes $\mathcal{C}_n$ semblent se rapprocher du segment d'équation $y = x$, chaque courbe semblant être en dessous de la courbe d'indice précédent.
On en déduit que les aires successives sous ces courbes doivent être de plus en plus petites, et donc que la suite (I_n) doit être décroissante.
Comme de plus il semble que les courbes "s'écrasent" sur le segment d'équation $y = x$, à la limite, l'aire sous la courbe devrait tendre vers l'aire sous le segment, c'est à dire $\frac{1}{2}$.
On peut donc émettre la conjecture que la suite converge vers $\frac{1}{2}$ en décroissant.

2. On a : $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x, \text{ par linéarité de l'intégrale.}\\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - x - \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ce qui est ce que l'on souhaitait démontrer.
On va maintenant en déduire le signe de cette différence. Pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle [0 ; 1], le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}$ est strictement positif, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, quant au nombre $1 - \mathrm{e}^{x}$, il est négatif, car x étant dans l'intervalle [0 ; 1], on a $x \geqslant 0$, et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc on en déduit que $\mathrm{e}^{x} \geqslant \mathrm{e}^{0}$, soit $\mathrm{e}^{x} \geqslant 1$, donc il suit que $1 - \mathrm{e}^{x} \leqslant 0$.
Le produit de deux nombres de signes contraires étant négatif, on vient de prouver que, pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle [0 ; 1], le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}(1 - \mathrm{e}^{x})$ est négatif.
L'intégrale entre deux bornes bien rangées d'une fonction négative étant négative, on en déduit que, pour tout entier n non nul, la différence $I_{n+1} - I_n$ est négative. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.
Comme par ailleurs, on a déjà prouvé que, pour tout n naturel non nul, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration [0 ; 1], on en déduit que l'intégrale de cette fonction positive entre des bornes (0 et 1) bien rangées est positive, donc cela signifie que pour tout n naturel non nul, I_n est positif. On a donc prouvé que la suite est minorée par 0.
(I_n) étant une suite minorée et décroissante, on peut en conclure qu'elle est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$, car la suite est minorée par 0.

3. Nous allons maintenant déterminer cette limite ℓ. Pour tout entier n naturel non nul, une primitive de f_n sur l'intervalle [0 ; 1] est définie par :
$F_n(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$. On a donc :
$I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = F_n(1) - F_n(0)$
$I_n = \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \left(\frac{1}{2} \times 0^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times (1 - \mathrm{e}^{-n})$.
Comme on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n} = 1$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par produit, puis par somme de limites, on en déduit :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$.
Finalement, nos deux conjectures sont bien vérifiées : la suite est bien décroissante, et converge vers une limite qui est bien $\frac{1}{2}$, l'aire sous la droite d'équation $y = x$ entre les abscisses 0 et 1.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

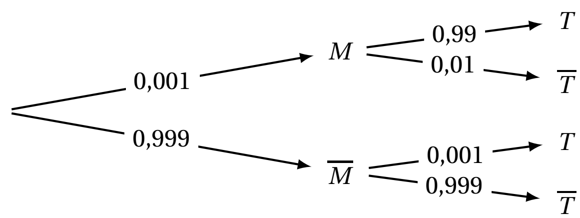
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Dans cette question (et la suivante), le choix de la personne dans la population étant fait au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité et donc les proportions sont assimilées à des probabilités.

a. Le pourcentage de personnes malades étant de 0,1%, la probabilité de l'événement M sera donc de 0,001.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



b. On applique la loi des probabilités totales, les événements M et $\overline{M}$ constituant une partition de l'univers :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001$

$P(T) = 0,001 \times (0,99 + 0,999) = 1,989 \times 10^{-3}$.

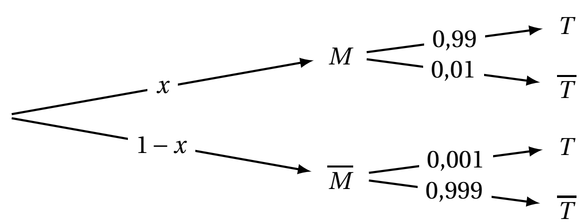
On obtient donc bien la valeur attendue.

c. Puisque l'affirmation fait référence à la probabilité d'être malade *sachant que* le test est positif, on va calculer la probabilité conditionnelle suivante :

$P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} = \dfrac{0,99}{0,99 + 0,999} \approx 0,498.$

La probabilité est inférieure à 0,5 (le dénominateur étant supérieur au double du numérateur), l'affirmation est correcte : si une personne obtient un test positif, alors la probabilité qu'elle soit effectivement malade est (légèrement) inférieure à 0,5, soit un peu moins d'une chance sur deux.

2. On reprend la même démarche, mais en modifiant les probabilités portées sur les branches de l'arbre qui devient :



On a alors : $P(T) = 0,99x + 0,001 \times (1 - x) = 0,001 + 0989x$ et donc :

$P_T(M) = \dfrac{0,99x}{0,001 + 0,989x}$.

On rappelle que x est une proportion, donc un nombre réel compris entre 0 et 1, les probabilités données ci-dessus sont donc bien comprises entre 0 et 1 également.

La question est alors de résoudre l'inéquation suivante :

$$
\begin{aligned}
P_T(M) \geqslant 0,95 &\iff \frac{0,99x}{0,001 + 0,989x} \geqslant 0,95 \\
&\iff 0,99x \geqslant 0,95 \times (0,001 + 0,989x) \qquad \text{car } 0,001 + 0,989x \geqslant 0. \\
&\iff 0,99x \geqslant 0,00095 + 0,93955x \\
&\iff 0,05045x \geqslant 0,00095 \\
&\iff x \geqslant \frac{0,00095}{0,05045} \qquad \text{car } 0,05045 \text{ est positif.}
\end{aligned}
$$

Le test sera donc commercialisable à condition que la proportion x soit supérieure à $\dfrac{0,00095}{0,05045} = \dfrac{19}{1009} \approx 0{,}01883$, c'est à dire quand le pourcentage de la population atteint par la maladie est supérieur à environ 1,88 %.

Partie B

1. **a.** On utilise la calculatrice, qui donne : $P(890 \leqslant X \leqslant 920) \approx 0,92$ à 10^{-2} près.

   b. On pose Z, variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Comme X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, alors Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
   On peut donc utiliser le nombre $u_{0,01} \approx 2,58$ tel que :
   $P(-u_{0,01} \leqslant Z \leqslant u_{0,01}) \approx 1 - 0,01 = 0,99$ à 10^{-3} près.
   Or : $-2,58 \leqslant Z \leqslant 2,58 \iff -2,58 \leqslant \dfrac{X-900}{7} \leqslant 2,58$
   $\iff -18,06 \leqslant X - 900 \leqslant 18,06$
   $\iff 900 - 18,06 \leqslant X \leqslant 900 + 18,06$
   Puisque le nombre h demandé est entier, on arrondit à $h = 18$.
   On vérifie bien à la calculatrice que $P(882 \leqslant X \leqslant 918) \approx 0,9899 \approx 0,990$ à 10^{-3} près.

2. Puisque la sélection de l'échantillon est assimilée à un tirage au sort avec remise, on a donc 1000 répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,97, ce qui conduit donc à un schéma de Bernoulli qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1000\,;\,0,97)$. Le paramètre $n = 1000$ étant suffisamment élevé, on en déduit que la fréquence de succès pour ce schéma de Bernoulli est comprise dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :
   $\left[0,97 - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{0,97\times 0,03}}{\sqrt{1000}}\,;\, 0,97 + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{0,97\times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right]$. Le calcul des valeurs approchées donne, à 10^{-4} près : $[0,9594\,;\,0,9806]$.
   Cela signifie que la proportion de comprimés conformes dans un lot de 1000 comprimés est comprise dans l'intervalle ci-dessus, avec une probabilité de 0,95. Comme la proportion de comprimés conformes constatée dans cet échantillon est de $\dfrac{1000-53}{1000} = 0,947$, c'est à dire en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique déterminé précédemment, on en déduit que les réglages faits par le laboratoire ont une forte probabilité d'être à revoir. La probabilité qu'ils soient corrects bien que l'échantillon donne une proportion de comprimés conformes en dehors de l'intervalle de fluctuation n'est que de 0,05.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

1. Nous avons une équation de degré 2, à coefficients réels. On va donc calculer le discriminant Δ du trinôme du second degré.
   $\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 16 = 16 - 4\times 16 = -3\times 16 = -48$.
   Le discriminant étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées, qui sont : $Z_1 = \dfrac{-4-\mathrm{i}\sqrt{48}}{2} = \dfrac{-4-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Présentons maintenant ces nombres sous leur forme exponentielle, en commençant par calculer le module de Z_1 : $|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$.
   On peut donc écrire : $Z_1 = 4\times\left(\dfrac{-2}{4} + \mathrm{i}\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}\right) = 4\times\left(\dfrac{-1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Un argument de Z_1 sera donc un angle dont le cosinus est $\dfrac{-1}{2}$ et le sinus est $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, donc $\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ dont la mesure principale est $\dfrac{-2\pi}{3}$.

La forme exponentielle de Z_1 est donc : $Z_1 = 4\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$, et puisque Z_2 est le conjugué de Z_1, d'après les propriétés des modules et arguments : $Z_2 = 4\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. L'équation admet donc deux solutions, qui sous leurs formes exponentielles sont : $Z_1 = 4\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $Z_2 = 4\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

2. Si a a pour module 2 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$, alors $a = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ et donc, d'après les propriété du module et des arguments, $a^2 = 2^2\mathrm{e}^{2\times\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$, donc on a $a^2 = Z_2$ et donc la forme algébrique de a^2 est $-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Le nombre a est donc une solution à l'équation dont on parle dans cette question. L'autre solution sera donc $-a$, car $(-a)^2 = a^2$, donc si a est une solution, $-a$ en sera une aussi. On va donc présenter les deux solutions sous forme algébrique, comme demandé :
$a = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\times\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-a = -1+\mathrm{i}\times\left(-\sqrt{3}\right)$.

3. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Il existe donc quatre nombres réels x_1 ; y_1 ; x_2 et y_2 tels que $z_1 = x_1+\mathrm{i}y_1$ et $z_2 = x_2+\mathrm{i}y_2$.
On a alors
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\\ &= x_1x_2+\mathrm{i}x_1y_2+\mathrm{i}y_1x_2+\mathrm{i}^2y_1y_2\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\end{aligned}$$
Comme les nombres x_1, x_2, y_1 et y_2 sont réels, alors on peut définir les nombres $x_3 = x_1x_2-y_1y_2$ et $y_3 = x_1y_2+x_2y_1$, qui sont réels également.
On a donc écrit le produit z_1z_2 sous la forme $x_3+\mathrm{i}y_3$, où x_3 et y_3 sont des nombres réels, donc le conjugué de z_1z_2 est :
$\overline{z_1z_2} = x_3-\mathrm{i}y_3 = (x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$.
Par ailleurs, calculons le produit : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1-\mathrm{i}y_1)\times(x_2-\mathrm{i}y_2)$
$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = x_1x_2-\mathrm{i}x_1y_2-\mathrm{i}y_2x_1+(-\mathrm{i})^2y_1y_2 = (x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) = \overline{z_1z_2}$.
Nous avons donc démontré que pour deux nombres complexes quelconques z_1 et z_2, on a : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1z_2}$.

La seconde propriété sera démontrée par récurrence. Posons, pour tout entier naturel n non nul la propriété $\mathcal{P}_n$, qui dit que pour tout complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $z^1 = z$, donc $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$: *la propriété $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.*

Hérédité : Pour tout entier k naturel non nul, on suppose vraie la propriété $\mathcal{P}_k$, c'est à dire que l'on suppose que pour tout complexe z, on a $\overline{z^k} = \left(\overline{z}\right)^k$.
On souhaite maintenant démontrer que si cette propriété est vraie, alors la propriété au rang suivant doit être vraie aussi.
Soit z un nombre complexe. On s'intéresse donc à $\overline{z^{k+1}}$. On a $z^{k+1} = z^k\times z$, donc :
$$\begin{aligned}\overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k\times z}\\ &= \overline{z^k}\times\overline{z} && \text{application de la propriété précédente.}\\ &= \left(\overline{z}\right)^k\times\overline{z} && \text{par hypothèse de récurrence.}\\ &= \left(\overline{z}\right)^{k+1} && \text{ce qui constitue la propriété } \mathcal{P}_{k+1}.\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que si la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie, cela implique que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est également : *la propriété est héréditaire.*

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc, on peut donc dire par le principe de récurrence, que pour tout entier n naturel non nul, et pour tout nombre complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Soit z une solution de l'équation (E), cela signifie que l'on a : $z^4+4z^2+16=0$. Vérifions maintenant si le conjugué de z est une solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
\overline{z}^4+4\overline{z}^2+16 &= \overline{z^4}+4\overline{z^2}+16 && \text{dernière propriété démontrée.}\\
&= \overline{z^4}+\overline{4z^2}+16 && \text{première propriété démontrée}\\
& && \text{sachant que } 4=\overline{4}\text{, car 4 est réel.}\\
&= \overline{z^4+4z^2+16} && \text{somme des conjugués.}\\
&= \overline{0} && \text{car } z \text{ est solution de } (E).\\
&= 0 && \text{car 0 est réel, donc est son propre conjugué.}
\end{aligned}$$

On a établi à la question **2.** que les nombres a et $-a$ sont tels que $a^2=Z_2$ et $(-a)^2=Z_2$.

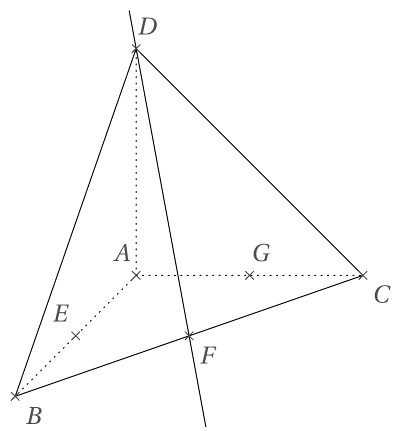
Comme par ailleurs on a dit que Z_2 est solution de l'équation $Z^2+4Z+16=0$, cela signifie que $\left(a^2\right)^2+4\left(a^2\right)+16=0$, donc que $a^4+4a^2+16=0$, donc a est solution de (E) et de la même façon, $-a$ est aussi une solution de cette équation.

En appliquant la propriété démontrée au début de cette question, on en déduit que les nombres $\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont également des solutions à cette équation. Nous avons donc 4 solutions à l'équation, qui sont distinctes : $a=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $-a=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $\overline{a}=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\overline{-a}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, donc puisqu'il y a au maximum 4 solutions à l'équation, celle ce ne peut avoir d'autre solution que celles trouvées, et donc l'équation (E) a été résolue.

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Tout d'abord, une figure :



1. a. Commençons par des coordonnées « évidentes », puisque liées au repère : $A(0\,;\,0\,;\,0)$; $B(1\,;\,0\,;\,0)$; $C(0\,;\,1\,;\,0)$ et $D(0\,;\,0\,;\,1)$.

Puisque F est le milieu de $[BC]$, on en déduit que ses coordonnées sont la moyenne de celles des points B et C, donc $F\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

b. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$ sont donc : $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$.

Si on appelle M_t le point de paramètre t sur la droite (DF), défini tel que $\overrightarrow{DM_t}=t\overrightarrow{DF}$, alors la représentation paramétrique de la droite (DF) est donnée par : $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\\ z=1-t\end{array}\right.\quad t\in\mathbf{R}$.

c. Puisque le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à (DF), alors un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est le vecteur $2\overrightarrow{DF}$, de coordonnées $(1~;~1~;~-2)$. Une équation cartésienne du plan sera alors de la forme $x+y-2z+d=0$, où d est un nombre réel. Comme ledit plan doit contenir le point A, le réel d doit être choisi de sorte que les coordonnées de A vérifient l'équation, donc :

$0+0-2\times 0+d=0$, ce qui donne $d=0$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donc : $x+y-2z=0$.

d. Le point H est un point de (DF), mais c'est aussi un point de $\mathscr{P}$, donc ses coordonnées sont celles d'un point de paramètre t dans la représentation paramétrique, qui vérifie également l'équation du plan :

$$\begin{aligned} M_t \in \mathscr{P} &\iff \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t-2(1-t)=0\\ &\iff 3t-2=0\\ &\iff t=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Le point de paramètre t sur la droite (DF) est sur le plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le paramètre t est $\frac{2}{3}$, ce qui nous indique que le point H est le point de coordonnées : $\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}~;~\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}~;~1-\frac{2}{3}\right)$, c'est à dire : $H\left(\frac{1}{3}~;~\frac{1}{3}~;~\frac{1}{3}\right)$

e. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$:

$\overrightarrow{HE}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}~;~0-\frac{1}{3}~;~0-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{6}~;~-\frac{1}{3}~;~-\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{HG}=\left(0-\frac{1}{3}~;~\frac{1}{2}-\frac{1}{3}~;~0-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}~;~\frac{1}{6}~;~-\frac{1}{3}\right)$.

Comme on travaille avec un repère orthonormé, le produit scalaire des deux vecteurs peut être obtenu avec ces coordonnées, et on a :

$\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\times\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{-1}{3}\times\frac{-1}{3}=\frac{-1}{18}+\frac{-1}{18}+\frac{1}{9}=0$.

Comme le produit scalaire des deux vecteurs est nul, ceux ci sont orthogonaux, et donc l'angle $\widehat{EHG}$ est bien droit.

2. On reconnaît dans le point M décrit, le point de paramètre t dans la représentation paramétrique de la droite (DF) donnée à la question **1. b.**.

a. Le point E est le milieu du segment $[AB]$, donc ses coordonnées sont $E\left(\frac{1}{2}~;~0~;~0\right)$ donc le vecteur $\overrightarrow{ME}$ a pour coordonnées :

$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t~;~0-\frac{1}{2}t~;~0-(1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{ME}\left(\frac{1}{2}(1-t)~;~-\frac{1}{2}t~;~t-1\right)$.

On a donc $ME^2=\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{ME}=\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(t-1\right)^2$

$ME^2=\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+\frac{t^2}{4}+t^2-2t+1=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$

On a bien prouvé $ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$

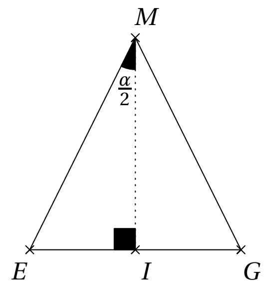
b. On procède de façon analogue pour calculer le carré de la distance MG : Le point G est le milieu du segment $[AC]$, donc ses coordonnées sont $E\left(0~;~\frac{1}{2}~;~0\right)$ donc le vecteur $\overrightarrow{MG}$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{MG}\left(0-\frac{1}{2}t~;~\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t~;~0-(1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{MG}\left(-\frac{1}{2}t~;~\frac{1}{2}(1-t)~;~t-1\right)$.

On a donc $MG^2=\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG}=\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+\left(t-1\right)^2$

$MG^2=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+t^2-2t+1=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$

On a bien prouvé $MG^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4} = ME^2$. Deux nombres ont le même carré quand ils sont égaux ou opposés, or ME et MG étant des distances, ils ne peuvent être opposés, donc $ME = MG$ et donc le triangle MEG est bien isocèle en M.
Visualisons la situation dans le plan (MEG) :



On nomme I le pied de la hauteur issue de M dans ce triangle. Le triangle étant isocèle en M, cette hauteur est aussi une bissectrice de l'angle $\widehat{EMG}$, donc on peut dire que dans le triangle EMI, rectangle en I, l'angle $\widehat{EMI}$ a donc une mesure égale à $\dfrac{\alpha}{2}$, et donc le sinus de cet angle est égal au quotient de la longueur du côté opposé à l'angle par celle de l'hypoténuse, soit : $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{IE}{ME}$, ce qui donne : $ME\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = IE$, or IE est la moitié de EG, puisque (IM), la hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle est aussi la médiane issue de ce sommet, donc I est le milieu de $[EG]$.
La distance EG peut être calculée en utilisant les coordonnées de E et G, puisque le repère est orthonormé :
$EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2 + (z_G - z_E)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 0} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
La distance IE étant la moitié de cette distance EG, on arrive bien à l'égalité attendue :
$ME\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. Puisque α désigne la mesure en radians d'un angle géométrique, on peut en déduire que cette mesure varie dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ et donc que le nombre $\dfrac{\alpha}{2}$ varie dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est strictement croissante, donc comme la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{2}$ l'est aussi, plus la mesure α est élevée, plus le nombre $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ l'est aussi.
La réciproque est vraie également : puisque la fonction est strictement croissante, plus l'image est élevée, plus l'antécédent l'est aussi.
On a donc prouvé que la valeur α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ l'est aussi.
Comme le produit de $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ par la distance ME est constant, et que les deux facteurs sont positifs, pour que l'un des facteurs soit maximal, il faut et il suffit que l'autre soit minimal, donc cela prouve $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal quand la distance ME est minimale.
Enfin, la distance ME étant nécessairement positive, et étant donné que la fonction carré est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on sait que ME est minimal si et seulement si ME^2 l'est aussi.
En conclusion, en utilisant ces différentes équivalences, on en déduit que la mesure α est maximale quand ME^2 est minimal.

d. Le polynôme de degré 2 qu'est $\dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$ a un coefficient dominant positif, donc son extremum sera un minimum, et celui ci sera atteint pour $t = \dfrac{-\dfrac{-5}{2}}{2\dfrac{3}{2}} = \dfrac{5}{6}$.

La position du point M telle que la mesure de l'angle soit maximale est celle atteinte pour le paramètre $t = \dfrac{5}{6}$, soit pour M de coordonnées : $M\left(\dfrac{5}{12}\ ;\ \dfrac{5}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right)$.

Ce qui suit est hors-sujet : On a alors $ME^2 = \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{5}{2} \times \dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{24}$.

On en déduit alors que $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{24}{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$, ce qui, à l'aide de la calculatrice donne $\alpha \approx 1,7722$ soit un angle d'environ 101,5°.

EXERCICE 4 — 5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Au bout d'un an, puisque le bassin B contenait 100 poissons (car $b_0 = 100$), la vente de ces poissons permettra d'en acheter un nombre deux fois plus élevé à mettre dans le bassin A, soit 200. À celà, il faut ajouter les 200 poissons que le pisciculteur achète de toutes façons pour le bassin A. Cela confirme bien $a_1 = 200 + 200 = 400$.

Pour le bassin B, on va commencer par y transférer les 200 poissons qui étaient dans le bassin A (car $a_0 = 200$), auxquels on ajoute les 100 poissons supplémentaires que le pisciculteur achète pour le bassin B, cela confirme bien : $b_1 = 200 + 100 = 300$.

On aura ensuite $a_2 = 2 \times b_1 + 200 = 2 \times 300 + 200 = 800$ et, là encore de façon analogue $b_2 = a_1 + 100 = 400 + 100 = 500$.

2. a. On généralise le raisonnement établi à la question précédente : pour tout entier naturel n, on a :

— $a_{n+1} = 2 \times b_n + 200$: le double du nombre de poissons dans le bassin B l'année précédente, auxquels on ajoute 200 poissons.

— $b_{n+1} = a_n + 100$: les poissons transférés du bassin A l'année précédente, auxquels on ajoute 100 poissons.

On calcule le produit matriciel AX_n : $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

On a donc la somme :

$AX_n + B = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 200 \\ a_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

b. On a :
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \\ &\iff (I_2 - A) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

où la matrice I_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $C = (I_2 - A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de déterminant non nul (le déterminant vaut -1), donc elle est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B &\iff C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1} \times B \end{aligned}$$

Calculons le produit $C^{-1} \times B$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-1 & -2\\-1 & -1\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}-200-200\\-200-100\end{pmatrix}\end{array}$$

On a donc $S = C^{-1} \times B = \begin{pmatrix}-400\\-300\end{pmatrix}$, donc les nombres x et y sont respectivement -400 et -300.

c. Pour tout entier naturel n, en posant $Y_n = \begin{pmatrix}a_n + 400\\b_n + 300\end{pmatrix}$, on pose en fait $Y_n = X_n - S$, où S est la matrice déterminée à la question précédente, solution de l'équation $AX + B = X$, donc telle que $AS + B = S$, ou bien $AS = S - B$. On a donc, pour n entier naturel :

$AY_n = A \times (X_n - S)$
$= AX_n - AS$
$= AX_n - (S - B)$ car S est solution de l'équation $AX + B = X$.
$= AX_n + B - S$
$= X_{n+1} - S$ d'après la relation de récurrence du **2. a.**
$= Y_{n+1}$ d'après la définition de la matrice Y_n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. a. Soit n un entier naturel. On a :

$Z_{n+1} = Y_{2\times(n+1)} = Y_{2n+2} = AY_{2n+1} = A \times (AY_{2n}) = A^2 Y_{2n} = A^2 Z_n$.

Or, on calcule A^2 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$

On a donc $A^2 = 2I_2$ et donc $Z_{n+1} = A^2 Z_n = 2I_2 Z_n = 2Z_n$, ce qu'il fallait démontrer.

b. On admet que pout tout entier n on a $Y_{2n} = 2^n Y_0$. En multipliant à gauche par la matrice A, cette égalité devient : $AY_{2n} = 2^n AY_0$ et, en utilisant la relation de récurrence établie à la question **2. c.**, cela donne bien : $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$.

On en déduit donc, en utilisant $Y_{2n} = 2^n Y_0$, que pour tout entier n, on a :

$\begin{pmatrix}a_{2n} + 400\\b_{2n} + 300\end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix}a_0 + 400\\b_0 + 300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}600 \times 2^n\\400 \times 2^n\end{pmatrix}$, donc en particulier :

$a_{2n} + 400 = 600 \times 2^n$, soit $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$.

Puis, en utilisant $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$, que pour tout entier n, on a :

$\begin{pmatrix}a_{2n+1} + 400\\b_{2n+1} + 300\end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix}a_1 + 400\\b_1 + 300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}800 \times 2^n\\600 \times 2^n\end{pmatrix}$, donc en particulier :

$a_{2n+1} + 400 = 800 \times 2^n$, soit $a_{2n} = 800 \times 2^n - 400$.

4. a. L'algorithme suivant demande un entier p à l'utilisateur, et renvoie dans la variable a qui sera affichée le nombre de poissons dans le bassin A au bout de p années. En effet :

— si p est un nombre pair, alors on affecte à n la valeur $\dfrac{p}{2}$, qui sera donc entière et on a $p = 2n$. On affecte à a la valeur qui est le résultat de la formule pour a_{2n}, c'est à dire a_p, formule établie à la question précédente. Donc si p est pair, à la fin de l'algorithme, a contient le nombre de poissons au bout de p années.

— si p est un nombre impair, alors $p - 1$ est pair et n est l'entier $\dfrac{p-1}{2}$ et donc $2n = p - 1$, soit $p = 2n + 1$. Et comme on affecte à a la valeur obtenue en appliquant la formule obtenue à la question précédente pour calculer a_{2n+1}, à nouveau, la valeur renvoyée sera a_p.

b. On peut modifier de façon assez basique l'algorithme présenté précédemment pour l'inclure dans une boucle :

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 200
	Affecter à p la valeur 0.
Traitement :	Tant que $a \leqslant 10000$:
	Affecter à p la valeur $p+1$
	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que
	Affecter à p la valeur $p-1$
Sortie :	Afficher p.

Cet algorithme initialise les variables a à a_0 et p à 0. Après chaque itération de la boucle "Tant que", p aura été incrémenté de 1, et la variable a aura été recalculée de sorte qu'elle contient la valeur a_p, donc après n itérations, p contient la valeur n et a contient a_n.

On sort de la boucle « Tant que » dès que la valeur dans a est strictement supérieur à 10000, c'est à dire le nombre de poissons pour la première année où le bassin A ne suffira plus, nombre d'années qui est contenu dans la variable p, donc le nombre d'années où le bassin A suffit est un de moins que ce qui est contenu dans la variable p, d'où la dernière affectation de p avant la sortie de l'algorithme.

On peut aussi proposer un algorithme un peu plus raffiné : chaque itération de la boucle « Tant que » nous fera passer deux ans au dessus :

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 400
	Affecter à p la valeur 1.
Traitement :	Tant que $a \leqslant 10000$:
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p+1}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Si $a \leqslant 10000$:
	Affecter à p la valeur $p+1$
	Affecter à n la valeur $\dfrac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Si $a \leqslant 10000$:
	Affecter à p la valeur $p+1$
	Fin de Si
	Fin de Si
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher p.

Ici, on initialise a avec la valeur a_1 et p avec 1. Du coup, on entre dans la boucle « Tant que » avec une valeur p impaire. On commence par calculer a_{p+1} avec la formule utilisée pour les indices pairs (p impair implique $p+1$ pair). a contient donc la valeur a_{p+1}.

Si cette valeur reste inférieure à 10000 alors, cela veut dire que l'année $p+1$ reste valable pour le bassin A, donc on affecte cette valeur $p+1$ à la variable p, qui est maintenant paire. On a à ce moment là a qui contient la valeur a_p.

À ce moment, on va calculer a_{p+1} avec la formule utilisée pour les indices impairs (p pair implique $p+1$ pair). a contient donc la valeur a_{p+1}.

Si cette valeur reste inférieure à 10000 alors, cela veut dire que l'année $p+1$ reste valable pour le bassin A, donc on affecte cette valeur $p+1$ à la variable p, qui est redevient impaire. On a à ce moment là a qui contient la valeur a_p.

On termine l'itération de la boucle avec une valeur à nouveau impaire. Après n itérations de la boucle, si les deux « Si » sont appliqués, on a p contenant la valeur $2n+1$ et a contenant a_p.

Par contre, quand l'un ou l'autre des « Si » n'est pas appliqué, cela signifie que la variable a, calculée et contenant la valeur a_{p+1} ne permet plus d'utiliser le bassin A, donc la dernière année valable pour le bassin A est bien p, et donc c'est pour cela que l'on incrémente pas la valeur de p.

Le fait que l'un des « Si » ne soit pas appliqué va aussi provoquer la sortie de la boucle « Tant que » (puisque le test est le même), et donc la valeur contenue dans p est bien la dernière pour laquelle le bassin A peut contenir a_p poissons.