

Baccalauréat S Métropole Juin 1995

Exercice 1

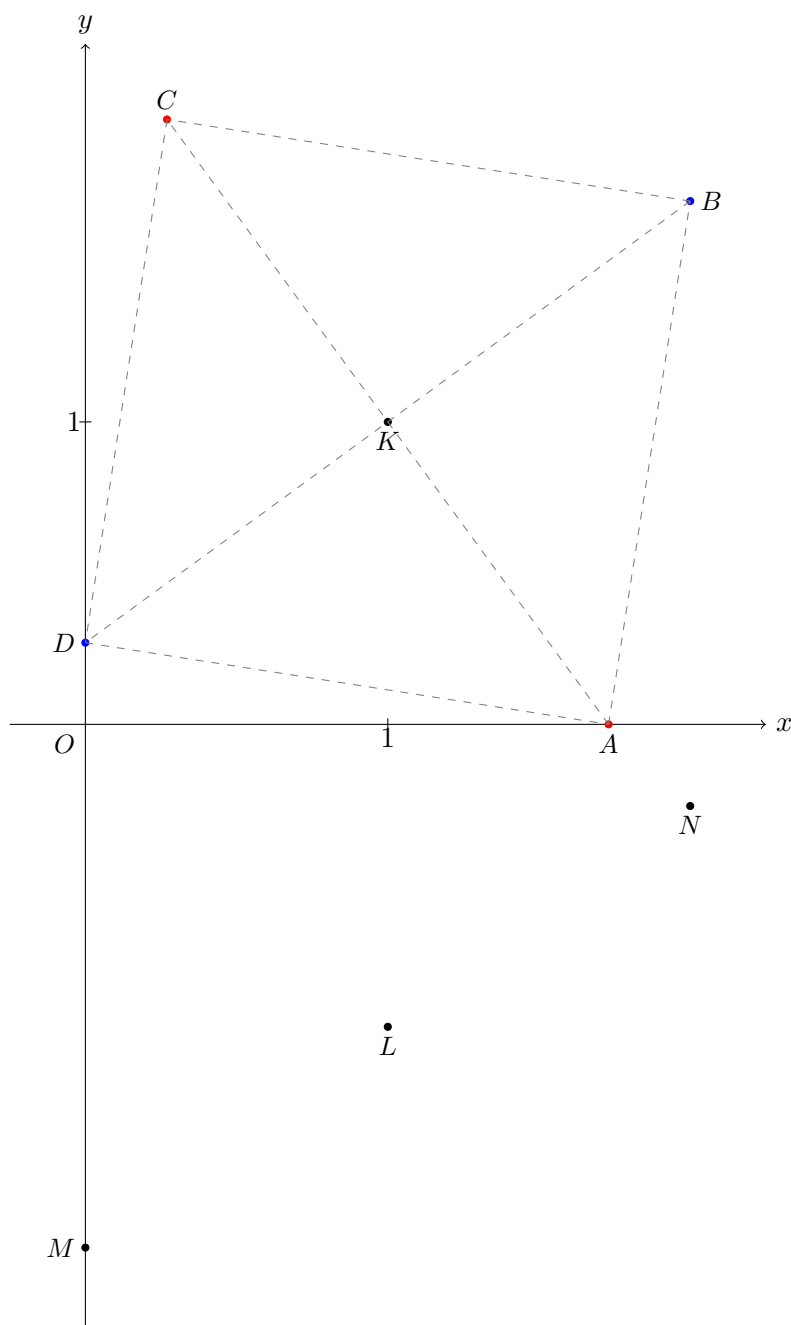
5 points

1. Notons Δ le discriminant de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$.

Il y a donc deux solutions complexes conjuguées : $\frac{-(-2) \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$

Ensemble des solutions : $\{1 - i ; 1 + i\}$.

2. Figure :



3. a. L'affixe du milieu de $[MN]$ est $\frac{z_M+z_N}{2} = \frac{-i\sqrt{3}+2+i(\sqrt{3}-2)}{2} = 1-i = z_L$.
 L est donc le milieu de $[MN]$ et l'affixe de N est bien $2+i(\sqrt{3}-2)$.
- b. Du fait de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $z_A = iz_M$ et $z_C = iz_N$.
On a donc $z_A = \sqrt{3}$ et $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$.
On remarque également que $iz_L = 1+i = z_K$, c'est-à-dire $K = r(L)$.
- c. Du fait de la translation $t_{\vec{u}}$, $z_D = z_M + 2i$ et $z_B = z_N + 2i$.
On a donc $z_D = (2 - \sqrt{3})i$ et $z_B = 2 + i\sqrt{3}$.
On remarque également que $z_L + 2i = 1+i = z_K$, c'est-à-dire $K = t_{\vec{u}}(L)$.
4. a. L est le milieu de $[MN]$. Par rotation r , l'image de L est le milieu de $[AC]$.
Comme $K = r(L)$, K est le milieu de $[AC]$.
De même, par translation $t_{\vec{u}}$, l'image de L est le milieu de $[DB]$.
Comme $K = t_{\vec{u}}(L)$, K est le milieu de $[DB]$.
- b. Du fait de la rotation r , $z_C - z_K = iz_N - iz_L = i(z_N - z_L)$.
Du fait de la translation $t_{\vec{u}}$, $z_B - z_K = z_N + 2i - (z_L + 2i) = z_N - z_L$.
On a donc $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$ c'est-à-dire $[AC] \perp [BD]$.
- c. Par rotation r , $[AC]$ et $[MN]$ ont même longueur. Par translation $t_{\vec{u}}$, $[DB]$ et $[MN]$ ont même longueur. $[AC]$ et $[DB]$ ont donc même longueur.
Les diagonales $[AC]$ et $[DB]$ ont même longueur, se coupent en leur milieu et forment un angle droit. Le quadrilatère $ABCD$ est donc un carré.

Exercice 2 (Enseignement obligatoire)

5 points

1. a. Notons v la fonction définie par $v(x) = \sqrt{x^2+2}$.
On a alors : $v'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}$ et donc :

$$v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$
- b.
$$f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}} = \left(\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$
- c.
$$I = \int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1.$$

$$I = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}) = b \ln\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right).$$
2. a.
$$J+2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx.$$

On a donc $K = J + 2I$ (eq. 1).
- b. Intégration par parties. Posons $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{x^2+2}$.

$$K = \int_0^1 u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx.$$

$$u(x) = x \text{ et } v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$$K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx.$$

$$K = \sqrt{3} - J \text{ (eq. 2).}$$

- c. En combinant (eq. 1) et (eq. 2) on obtient $2K = \sqrt{3} + 2I$ et $2J = \sqrt{3} - 2I$.
C'est-à-dire : $K = \frac{\sqrt{3}}{2} + I$ et $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I$.

Exercice 2 (Enseignement de spécialité)

5 points

1. a. Posons $u(x) = x + \sqrt{1+x^2}$. On a alors $f = \ln u$ et $f' = \frac{u'}{u}$.
 $u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{u(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. On a donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
On en déduit que : $u_0 = \int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \ln(1 + \sqrt{2})$.
- b. On remarque que $\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
On a alors : $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$.
 $u_1 = \sqrt{2} - 1$.
2. a. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^n \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
Pour $x \in [0 ; 1]$, on a $x^n \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante. Elle est de plus trivialement minorée par 0.
 (u_n) est donc convergente car décroissante et minorée.
- b. Pour $x \in [0 ; 1]$, on a $0 \leq x^2 \leq 1$. Donc $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ et par croissance de la fonction racine carrée :
 $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.
On en déduit que $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$ et que
 $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx$
 $\left[\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}x^{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{1}{(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1$
 $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)}$ (eq. 1).
Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, u_n a pour limite 0 (théorème des gendarmes).
3. a. Soit $n \geq 3$, $u_n + u_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2}(x^2+1) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx = I_n$.
On a donc $u_n + u_{n-2} = I_n$ pour $n \geq 3$.
Intégration par partie : posons $u'(x) = x^{n-2}$ et $v(x) = \sqrt{1+x^2}$.
 $I_n = \int_0^1 u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx$.
On a $u(x) = \frac{1}{n-1}x^{n-1}$ et $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
 $I_n = \left[\frac{1}{n-1}x^{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n-1}x^{n-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
 $I_n = \frac{1}{n-1} \left(\sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \right)$.
 $I_n = \frac{1}{n-1} (\sqrt{2} - u_n)$.
Or $u_n + u_{n-2} = I_n$. On en déduit donc que $u_n + u_{n-2} = \frac{1}{n-1} (\sqrt{2} - u_n)$ et donc :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

- b. Comme (u_n) est décroissante : $nu_n + (n-1)u_{n-2} \geq nu_n + (n-1)u_n = (2n-1)u_n$.

On en déduit que $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$ (eq. 2).

- c. De (eq. 1), on déduit que $\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n$. On a : $\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$ quand n tend vers l'infini.

De (eq. 2), on déduit que $nu_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} + u_n)$. On a $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + u_n)$ tend vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}$) quand n tend vers l'infini.

Le théorème d'encadrement permet de conclure : nu_n converge et sa limite est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PROBLÈME

11 points

Partie A

1. a. Le coefficient directeur de T_a est $\exp'(a)$ c'est-à-dire e^a . T_a passe par le point de coordonnées $(a ; e^a)$. Son équation réduite est donc : $y - e^a = e^a(x - a)$ c'est-à-dire :

$$y = e^a x + e^a(1 - a) \text{ (Eq. } T_a \text{)}$$

Le coefficient directeur de D_λ est $\ln'(\lambda)$ c'est-à-dire $\frac{1}{\lambda}$. D_λ passe par le point de coordonnées $(\lambda ; \ln \lambda)$. Son équation réduite est donc : $y - \ln \lambda = \frac{1}{\lambda}(x - \lambda)$ c'est-à-dire :

$$y = \frac{1}{\lambda}x + \ln \lambda - 1 \text{ (Eq. } D_\lambda \text{)}$$

- b. T_a et D_λ sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\lambda} = e^a$$

2. T_a et D_b sont confondues si et seulement si $\begin{cases} \frac{1}{b} = e^a \\ \ln b - 1 = e^a(1 - a) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ -a - 1 = e^a(1 - a) \end{cases} \text{ car } \ln b = -a.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ (a+1)e^{-a} = a - 1 \end{cases}$$

Partie B

1. a. $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}e^x = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = e^{-x}$.

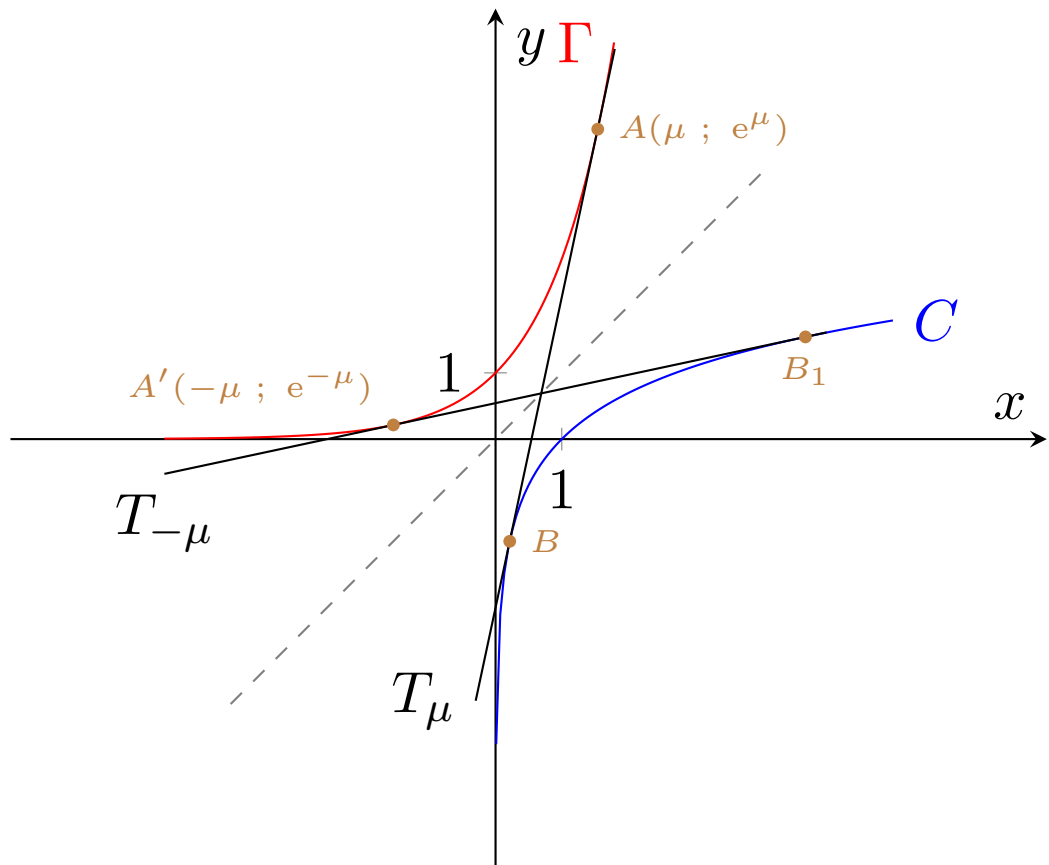
- b. f est continue et dérivable sur I .

$f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}e^x + \frac{x-1}{x+1}e^x = \left(\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{x+1}\right)e^x = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x$. La dérivée est strictement positive sur I , f est donc strictement croissante sur I .

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	$+\infty$

- c. f est continue sur I et strictement croissante de I sur $[-1 ; +\infty[$: c'est une bijection de I sur $[-1 ; +\infty[$.
1 admet donc un antécédant unique μ par f .
Les valeurs approchées de $f(1,5)$ et $f(1,6)$ à 10^{-3} près sont : 0,896 et 1,143.
Donc $\mu \in [1,5 ; 1,6]$.
2. a. $f(x) \times f(-x) = \frac{x-1}{x+1}e^x \times \frac{-x-1}{-x+1}e^{-x} = 1$.
b. Comme $\mu \neq 1$, on peut appliquer le résultat précédent pour μ . $f(\mu) \times f(-\mu) = 1$ et comme $f(\mu) = 1$, on a : $f(-\mu) = 1$. Comme μ est l'unique solution sur I , $-\mu$ est forcément l'unique solution sur $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; 0]$.
L'ensemble des solutions à l'équation (1) est : $\{\mu, -\mu\}$.
c. Pour μ , comme $e^\mu = \frac{\mu+1}{\mu-1}$, l'équation de la tangente T_μ est $y = \frac{\mu+1}{\mu-1}x + 1 - \mu$.
Pour $-\mu$, comme $e^{-\mu} = \frac{\mu-1}{\mu+1}$, l'équation de la tangente $T_{-\mu}$ est $y = \frac{\mu-1}{\mu+1}x + \mu - 1$.
d. Représentation graphique :



Partie C

1. De façon évidente, S est involutive. On a donc $S(M') = M$.

Soit $M(x ; e^x)$ un point de Γ . $S(M)$ a pour coordonnées $(-x ; \frac{1}{e^x})$, c'est-à-dire : $(-x ; e^{-x})$.

On a donc $S(M) \in \Gamma$.

2. a. On $A(\mu ; e^\mu)$. Donc $A'(-\mu ; e^{-\mu})$ et $A' \in \Gamma$ d'après la question C.1.
b. Par définition $T_{-\mu}$ est la tangente à Γ au point d'abscisse $-\mu$, c'est-à-dire au point de coordonnées $(-\mu ; e^{-\mu})$. C'est A' .
 $T_{-\mu}$ est confondue avec D_{e^μ} . Elle est donc tangente à C au point d'abscisse e^μ . on a donc $B_1(e^\mu ; \mu)$.
3. a. μ et $-\mu$ vérifiant l'équation 1, on a $e^\mu = \frac{\mu+1}{\mu-1}$ et $e^{-\mu} = \frac{\mu-1}{\mu+1}$.
On a donc : $A(\mu ; \frac{\mu+1}{\mu-1})$, $A'(-\mu ; \frac{\mu-1}{\mu+1})$, $B(\frac{\mu-1}{\mu+1} ; -\mu)$ et $B_1(\frac{\mu+1}{\mu-1} ; \mu)$.
b. La symétrie par rapport à la droite $y = x$ permute l'abscisse et l'ordonnée de chacun des points. B est l'image de A' et A est l'image de B_1 . Par la symétrie, la droite $(A'B_1)$ (c'est-à-dire $T_{-\mu}$) a pour image la droite (BA) (c'est-à-dire $T_{-\mu}$). AB_1BA' est un trapèze.

4. Notons $\mathcal{A}_\Gamma$ l'aire délimitée par la courbe Γ et l'axe des abscisses entre $-\mu$ et μ .

$$\mathcal{A}_\Gamma = \int_{-\mu}^{\mu} e^x dx = [e^x]_{-\mu}^{\mu} = e^\mu - e^{-\mu}.$$

$$\mathcal{A}_\Gamma = \frac{\mu+1}{\mu-1} - \frac{\mu-1}{\mu+1} = \frac{4\mu}{\mu^2-1}.$$

Notons $\mathcal{A}_{A'A}$ l'aire délimitée par le segment $[A'A]$ et l'axe des abscisses entre $-\mu$ et μ .

$$\mathcal{A}_{A'A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \times 2\mu = \left(\frac{\mu+1}{\mu-1} + \frac{\mu-1}{\mu+1} \right) \mu = 2\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\mu.$$

L'aire $\mathcal{A}$ recherchée est : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{A'A} - \mathcal{A}_\Gamma$.

$$\mathcal{A} = 2\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\mu - \frac{4\mu}{\mu^2-1} = 2\mu \left(\frac{\mu^2+1-2}{\mu^2-1} \right) = 2\mu.$$