∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
On note G_k le barycentre du système $\left\{\left(\text{A},\ k^2+1\right),\ (\text{B},\ k),\ (\text{C},\ -k)\right\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on a l'égalité :
$$\overrightarrow{\text{A}G_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{\text{BC}}.$$
   b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par
$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$
   c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.
3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :
$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$
4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :
$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$
5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,0\,;\,2)$, $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et
$(-1\ ;\ 2\ ;\ 5)$. Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.
   a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.
   Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.
   b. Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$ intersection de (E) et (F).

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\text{O}M_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points $\text{M}_0,\ \text{M}_1,\ \text{M}_2, \dots, \text{M}_{11}$.
2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{12}\right)}$.
3. **a.** Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :
   - les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;

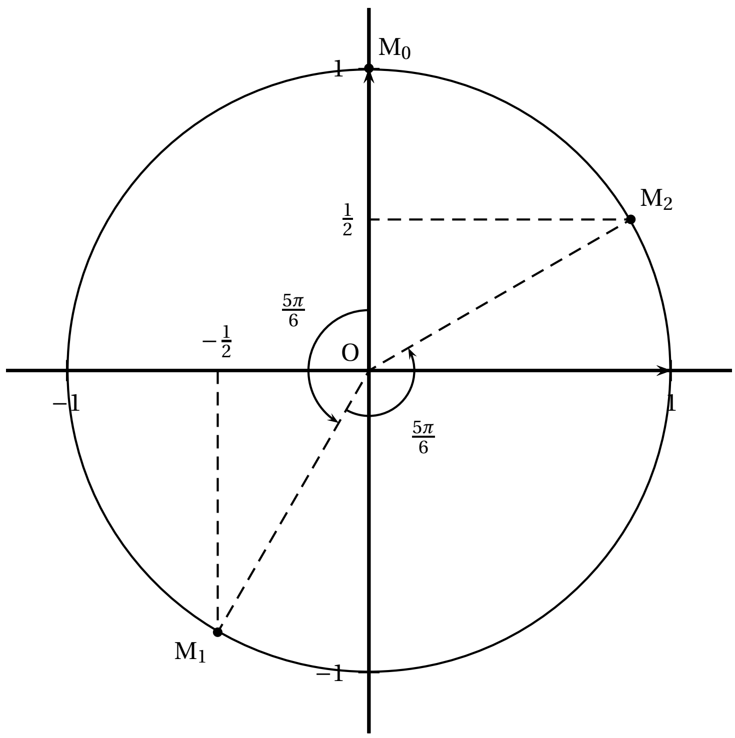
- les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = \text{e}^{-\frac{2\text{i}\pi}{3}} z_n$.
En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral.
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $\text{M}_0, \text{M}_1, \text{M}_2, \cdots, \text{M}_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. La multiplication par $\text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}}$ correspond à une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$.
M_0 est le point d'affixe i. On obtient les points successifs sur la figure ci-dessous :



Démonstration par récurrence :
Initialisation : on a $z_0 = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\times 0\pi}{6}\right)} = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$: l'égalité est vraie au rang 0.
Hérédité : soit un entier quelconque p, $p \geqslant 0$ et supposons que $z_p = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5p\pi}{6}\right)}$.
Alors $z_{p+1} = z_p \times \text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}} = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5p\pi}{6}\right)} \times \text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}} = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(p+1)\pi}{6}\right)}$; donc la relation est vraie au rang $p+1$.
La relation est vraie au rang 0 et pour tout entier $n \geqslant 0$, $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$ entraîne que $z_{n+1} = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}$; on a donc démontré par le principe de la récurrence que pour tout naturel n, $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$.

3. M_n et M_p sont confondus si, et seulement si les arguments de z_n et de z_p sont égaux à $2k\pi$ près, soit si :

$\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}+2k\pi \iff \frac{5n\pi}{6}=\frac{5n\pi}{6}+2k\pi \iff$
$5n\pi = 5p\pi+12k\pi \iff 5n=5p+12k \iff 5n-5p=12k \iff 5(n-p)=12k$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Donc $5(n-p)$ divise 12 mais comme 5 est premier avec 12, d'après le théorème de Gauss, $(n-p)$ divise 12 ou encore $(n-p)$ est un multiple de 12.

4. **a.** On a $12\times 4-5\times 9=48-45=3$: le couple $(4\,;\,9)$ est une solution de l'équation (E). De :
$\left\{\begin{array}{lcl} 12x-5y & = & 3\\ 12\times 4-5\times 9 & = & 3\end{array}\right.$ on en déduit par différence $12(x-4)-5(y-9)=0 \iff 12(x-4)=5(y-9) \quad (1)$.

On en déduit que 5 divise $12(x-4)$, mais comme 5 est premier avec 12 d'après le théorème de Gauss, 5 divise $x-4$.

Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x-4=5k \iff x=4+5k,\ k\in\mathbb{Z}$.

En remplaçant dans (1) $x-4$ par $5k$, on obtient :

$12\times 5k=5(y-9) \iff 12k=y-9 \iff y=9+12k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Inversement : $12\times(4+5k)-5\times(9+12k)=48+60k-45-60k=48-45=3$.

Les couples solutions de (E) sont donc les couples $(4+5k\,;\,9+12k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Avec $k=0$ on retrouve le couple solution donné dans l'énoncé.

b. M_n appartient à $[\mathrm{O}x)$ si $\arg z_n=0 \quad [2\pi] \iff \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5n\pi}{6}=0 \quad [2\pi] \iff$
$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5n\pi}{6}=2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, ou encore
$\dfrac{1}{2}+\dfrac{5n}{6}=2k \iff 3+5n=12k \iff 12k-5n=3$. On retrouve l'équation (E) avec $x=k$ et $y=n$. Les solutions sont telles que $y=n=9+12k'$, avec $k'\in Z$.

n étant un naturel, finalement M_n appartient à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$ si, et seulement si :

$$n=9+12k',\quad k'\in\mathbb{N}.$$

PROBLÈME **9 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

Partie A

$\star$ Étude d'une fonction f

On définit la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right).$$

1. • Limite en 0 :
On a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-1\right)=0$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)=-\infty$.

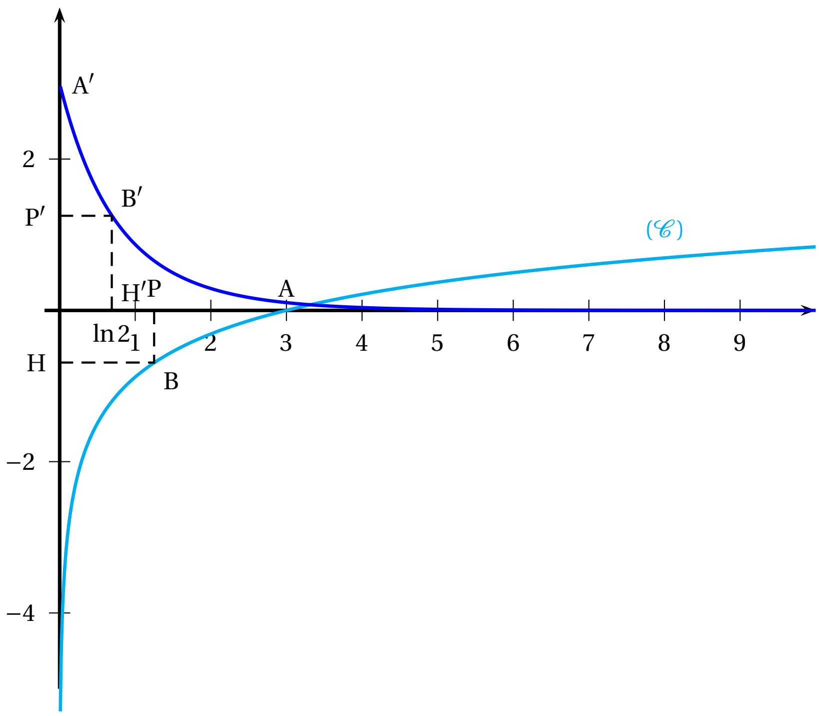
• Limite en $+\infty$:
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}-1=+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)=+\infty$.

2. f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}.$$

Or $x>0\Rightarrow x+1>1\Rightarrow\sqrt{x+1}>1 \iff \sqrt{x+1}-1>0$: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro, donc sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$: la fonction est croissante de moins à plus l'infini.

3. On a $f(3) = \ln\left(\sqrt{1+3}-1\right) = \ln\left(\sqrt{4}-1\right) = \ln 1 = 0$. Donc A$(3\,;0)$.
D'autre part $f\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{1+\frac{5}{4}}-1\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{9}{4}}-1\right) = \ln\left(\frac{3}{2}-1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.
B$\left(\frac{5}{4}\,;\,-\ln 2\right)$.
Donc P$\left(\frac{5}{4}\,;\,0\right)$ et H$(0\,;\,-\ln 2)$.



Partie B

⋆ Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z la rotation r associe le point M' d'affixe z'.

1. a. On sait que la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ associe au point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} z = \mathrm{i}z$.
On a donc $z' = x' + \mathrm{i}y' = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) \iff x' + \mathrm{i}y' = \mathrm{i}x - y$, soit en identifiant les parties réelle et imaginaires :
$\left\{\begin{array}{rcr} x' & = & -y \\ y' & = & x \end{array}\right.$. On obtient de façon immédiate : $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & y' \\ y & = & -x' \end{array}\right.$

b. D'après la question précédente : A′$(0\,;\,3)$, B$\left(\ln 2\,;\,\frac{5}{4}\right)$, P$\left(0\,;\,\frac{5}{4}\right)$.

2. a. $M(x\,;\,y)$ appartient à $(\mathscr{C})$ si et seulement $y = \ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ soit en remplaçant x et y avec les formules trouvées :
$-x' = \ln\left(\sqrt{1+y'}-1\right) \iff \mathrm{e}^{-x'} = \sqrt{1+y'}-1 \iff \mathrm{e}^{-x'}+1 = \sqrt{1+y'} \Rightarrow \left(\mathrm{e}^{-x'}+1\right)^2 = 1+y' \iff \mathrm{e}^{-2x'}+2\mathrm{e}^{-x'}+1 = 1+y' \iff \mathrm{e}^{-2x'}+2\mathrm{e}^{-x'} = y'$, ce qui signifie que le point M' appartient à (Γ).

b. Voir plus haut.

Partie C

⋆ Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. On a $\displaystyle\int_0^{\ln 2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\ln 2} - 2\mathrm{e}^{-\ln 2} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} - 2\mathrm{e}^{0}\right) = -\frac{1}{2\mathrm{e}^{\ln 4}} - \frac{2}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{8}.$

   La fonction g est bien entendu positive sur $[0~;~\ln 2]$, donc l'intégrale précédente est égale en unités d'aire à l'aire de la surface limitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 2$.

2. **a.** La droite $x = \ln 2$ est la droite $(\mathrm{H}'\mathrm{B}')$, donc l'image de la surface $\mathcal{D}$ et la surface dont on vient de calculer l'aire. On a donc inversement $\mathcal{A} = \frac{11}{8}$.

   b. On a vu que sur $\left[\frac{5}{4}~;~3\right]$, le fonction f est négative, donc l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\mathrm{d}x$ est l'opposée de l'aire de de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les segments [BP] et [PA].

   On a donc $\mathcal{A} = \text{aire(OHBP)} - I$ d'où

   $I = \dfrac{5}{4}\ln 2 - \mathcal{A} = \dfrac{5}{4}\ln 2 - \dfrac{11}{8} \approx -0,51.$