∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole ∾ juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$.
   Or $2n+3 \geqslant 3 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.

2. **a.** Démonstration par récurrence :
   — Initialisation : $u_0 = 1 > 0^2$: vrai ;
   — Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1 + 2$ ou encore $u_{n+1} > (n+1)^2 + 2$ donc a fortiori $u_{n+1} > (n+1)^2$.
   On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$

   b. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ on a par comparaison : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On calcule les premiers termes : $\begin{array}{lcr} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & u_0 + 3 = 4 \\ u_2 & = & u_1 + 2 + 3 = 9 \\ u_3 & = & u_2 + 4 + 3 = 16 \\ u_4 & = & u_3 + 6 + 3 = 25 \end{array}$

   On peut donc conjecturer que $u_n = (n+1)^2$.
   Démonstration de la propriété par récurrence :
   — Initialisation $u_0 = 1 = 1^2$
   — Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = (n+1)^2$
   On a donc $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
   On a donc démontré par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $(1+\mathrm{i})^6 = [(1+\mathrm{i})^2]^3 = (1+\mathrm{i})6 = (1+2\mathrm{i}-1)^3 = (2\mathrm{i})^3 = -8\mathrm{i}$.
   Autre méthode : $|1+\mathrm{i}|^2 = 2$, donc $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$; donc $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   Donc $(1+\mathrm{i})^6 = \left[\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right]^6 = 8\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -8\mathrm{i}$.

2. **a.** Soit l'équation $z^2 = -8\mathrm{i}$; d'après la question précédente $(1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$ donc $[(1+\mathrm{i})^3]^2 = -8\mathrm{i}$ donc le nombre complexe $z = (1+\mathrm{i})^3$ est solution de (E) ; or $(1+\mathrm{i})^3 = (1+\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (1+2\mathrm{i}-1)(1+\mathrm{i}) = -2+2\mathrm{i}$.
   Conclusion : $-2+2\mathrm{i}$ est une solution de (E).

   b. $z^2 = -8\mathrm{i}$, d'où $z^2 - (-8\mathrm{i}) = 0 \iff z^2 - (-2+2\mathrm{i})^2 = 0 \iff [z - (-2+2\mathrm{i})]\,[z + (-2+2\mathrm{i})] = 0$.
   On retrouve la solution précédente et aussi le nombre complexe $2 - 2\mathrm{i}$ autre solution de l'équation (E).

3. $(1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i} \iff [(1+\mathrm{i})^2]^3 = -8\mathrm{i}$.
   Le nombre complexe $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ est solution de l'équation (E′).

4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   a. Soit A le point d'affixe 2i Si B est l'image de A par r, on a :
   $z_{\mathrm{B}} = b = z_{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Donc $b = 2\mathrm{i}\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   Pour C, l'image de B par la rotation r, on a : $c = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\,b =$

$$\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{3}-\mathrm{i}.$$

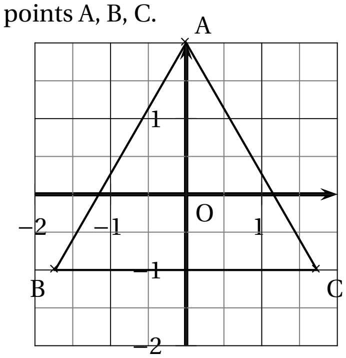
b. On a $\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^3=\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^2\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\left(2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\mathrm{i}-6\mathrm{i}=-8\mathrm{i}$.

Variante : pour c : on calcule facilement que $|c|=2$, d'où $c=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

D'où $c^3=\left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3=2^3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=-8\mathrm{i}$.

Donc b et c sont solution de l'équation (E$'$).

5. a. Représentation des points A, B, C.



b. AB $=|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}|=\left|-\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right|=2\sqrt{3}$;
AC $=|z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}|=\left|\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right|=2\sqrt{3}$;
BC $=|z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}|=\left|2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$.

Par la rotation r :

— l'image de A est B ;

— l'image de B est C ;

— l'image de C est C$'$ tel que $z_{\mathrm{C}'}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=2\mathrm{i}$.
Donc C$'$ = A.
L'image de C est A.

Les trois points images sont donc les sommets du triangle BCA. Or ce triangle a ses trois côtés de même longueur : il est donc équilatéral.

c. G centre de gravité (ou isobarycentre des points A, B et C) du triangle ABC a une affixe telle que $z_{\mathrm{G}}=\frac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}}}{3}=\frac{2\mathrm{i}-\sqrt{3}-\mathrm{i}+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{3}=0$.

Le centre de gravité est donc le point O.

Autre méthode : par définition de la rotation on a OA = OB = OC ; O est donc le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) ; or ce triangle est équilatéral : son centre du cercle circonscrit est aussi son centre de gravité.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}$ est la somme des k premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x : elle est donc égale à : $\frac{x^k-1}{x-1}$ (pour $x\neq 1$).

Donc $(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right)=(x-1)\times\frac{x^k-1}{x-1}=x^k-1$.

Pour $x=1$: l'égalité est évidente.

2. **a.** $n \in N,\ n = dk$.

   D'après la question **1.** $a^n - 1 = (a-1)\left(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}\right) = a^{dk} - 1 = \left(a^d\right)^k - 1 = \left(a^d - 1\right)(\cdots + \cdots)$, la parenthèse étant une somme d'entiers donc un entier.

   Conclusion : $a^n - 1 = \left(a^d - 1\right)(\cdots + \cdots)$, ce qui signifie que $\left(a^d - 1\right)$ est un diviseur de $a^n - 1$.

   b. On a donc

   — 2 004 est multiple de 3, donc d'après le **a.** $2^{2\,004} - 1$ est divisible par $2^3 - 1 = 7$;

   — 2 004 est multiple de 3 et de de 2, donc de 6; d'où $2^{2\,004} - 1$ est divisible par $2^6 - 1 = 63$:

   — On vient de voir que $2^{2\,004} - 1 = 63k = 9 \times (7k)$, donc $2^{2\,004} - 1$ est divisible par 9.

3. **a.** $m = dm'$ et $n = dn'$. Puisque d est le plus grand diviseur commun à m et n, on sait que m' et n' sont premiers entre eux. D'après Bezout il existe $(u,\ v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$m'u - n'v = 1 \iff m'ud - n'vd = d \iff mu - nv = d$$

   b. Avec u et v positifs, l'égalité précédente peut s'écrire $mu = nv + d$.

   D'où : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)\,a^d = \left(a^{nv+d} - 1\right) - (a^{nv} - 1)\,a^d = \left(a^{nv} \times a^d - 1\right) - (a^{nv} - 1)\,a^d = \left(a^{nv} \times a^d\right) - 1 - \left(a^{nv} \times a^d\right) + a^d = a^d - 1$.

   Le PGCD de $a^{mu} - 1$ et $a^{nv} - 1$ divise aussi $a^{mu} - 1$ et $(a^{nv} - 1)\,a^d$ (et c'est le plus grand diviseur) donc leur différence qui est $a^d - 1$.

   Donc le PGCD de $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)\,a^d$ et de $a^{np} - 1$ est égal au PGCD de $a^d - 1$ et de $a^{np} - 1$. Nous avons vu à la question précédente que comme d divise n, $a^d - 1$ divise $a^{nv} - 1$.

   Conclusion :le PGCD de $a^{mu} - 1$ et $a^{nv} - 1$ est égal à $a^d - 1$.

   c. Application : $m = 63,\ n = 60$.

   $63 = 3^2 \times 7$ et $60 = 2 \times 3 \times 5$. Donc PGCD(63 ; 60) = 3.

   On a $m = 63 = 3 \times 21 = 3m'$ et $n = 60 = 3 \times 20 = 3n'$.

   D'autre part 21 et 20 sont premiers et on trouve facilement

   $u = 1,\ v = 1$ tels que $21 \times 1 - 20 \times 1 = 1$.

   Donc $mu - nv = 63 - 60 = 3 =$ PGCD(63 ; 60). En appliquant le résultat de la question précédente :

   $\text{PGCD}\left(2^{63} - 1\ ;\ 2^{60} - 1\right) = 2^3 - 1 = 7$.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Réponse D : Pour que S appartienne à $\mathscr{D}$, il faut que les coordonnées de S vérifient les équations paramétriques de $\mathscr{D}$. Or ces coordonnées de S ne vérifient ni A($z \neq 3$) ni B (il faudrait $t = -1$ et $t = 1/3$), mais vérifient les équations C et D.

   De plus $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}$ il faut que tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$ soit colinéaire à tout vecteur normal de $\mathscr{P}$. Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(1\,;1\ ;\ -3)$ est normal à $\mathscr{P}$.

   Or la droite définie par C a un vecteur directeur de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 0)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

   Par contre un vecteur directeur de la droite définie par D a pour coordonnées $(1\,;1\ ;\ -3)$ qui sont les coordonnées de $\overrightarrow{n}$.

2. Réponse D car seules les coordonnées de D vérifient l'équation du plan $\mathscr{P}$: elles correspondent à la valeur $t = \dfrac{14}{11}$.
3. Réponse B :
   $d(\mathrm{S},\ \mathscr{P}) = \dfrac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$.
4. Réponse B :
   La distance de S au plan est inférieure à 3 donc l'intersection de la sphère et du plan $\mathscr{P}$ est un cercle de centre H.
   Le triangle SHM, M étant un point du cercle est rectangle en H.
   D'après le théorème de Pythagore on a : $3^2 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{11}}\right)^2 + r^2 \iff r^2 = 9 - \dfrac{9}{11} = \dfrac{90}{11} \Rightarrow r = 3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$.

Exercice 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a donc $0,5 = \displaystyle\int_0^{200} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{200} = -\mathrm{e}^{-200\lambda} + 1 \iff \mathrm{e}^{-200\lambda} = 0,5 \iff -200\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. La probabilité cherchée est $1 - \displaystyle\int_0^{300} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{300} = \mathrm{e}^{-300\lambda} = \mathrm{e}^{-\frac{300\ln 2}{200}} = e^{-\frac{3\ln 2}{2}} \approx 0,353$ soit $0,35$ à 10^{-2} près par défaut.
3. **a.** Pour calculer l'intégrale on pose :
   $$\begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{array}$$
   Les fonctions $u,\ u',\ v,\ v'$ étant continues, on peut intégrer par parties et $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\lambda\frac{1}{\lambda}x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^A + \frac{1}{\lambda}\int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^A = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^A = -A\mathrm{e}^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda A\mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.
4. Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$ (car $\lambda > 0$ et que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A\mathrm{e}^{-\lambda A} = 0$, on en déduit que :
   $$\lim_{A\to+\infty} \frac{-\lambda A\mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}.$$
   Donc $d_m = \dfrac{200}{\ln 2} \approx 289$ semaines à une semaine près.

Exercice 5 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. $x'(t) = v(t)$.
   - Si v est solution de l'équation (F), alors pour tout réel $t \geqslant 0$,
     $v'(t) = -\dfrac{1}{8}v(t) + \dfrac{1}{4}$.
     Or $x'(t) = v(t) \Rightarrow x''(t) = v'(t)$.
     L'équation précédente s'écrit donc :
     $$\begin{aligned} x''(t) &= -\frac{1}{8}x'(t) + \frac{1}{4} \\ 8x''(t) &= -x'(t) + 2 \\ 25x'(t) + 200x''(t) &= 50 \end{aligned}$$

La fonction x est donc solution de l'équation (E).

- Inversement si x est solution de (E), alors pour tout réel positif,

$$\begin{aligned} 25x'(t) + 200x''(t) = 50 & \\ x''(t) &= -\frac{26}{200}x'(t) + \frac{50}{200} \\ x''(t) &= -\frac{1}{8}x'(t) + \frac{1}{4} \\ v'(t) &= -\frac{1}{8}v(t) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

car en posant $v(t) = x'(t),\ v'(t) = x''(t)$

Conclusion : la fonction x est solution de (E) si et seulement si la fonction v est solution de (F).

Résolution de (F) : cette équation est de la forme $y' = ax + b$. Elle a une solution particulière constante $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} = 2$ et les solutions de l'équation $y = ax$ sont de la formes $y = K\mathrm{e}^{ax} = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x}$ (avec $K \in \mathbb{R}$).

Les solutions de l'équation $y = ax + b$ sont donc de la forme :

$y = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x} + 2$

Les fonctions v solutions de l'équation (F) sont les fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$v(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2$$

2. **a.** Calcul de $x'(t)$: on sait que $x'(t) = v(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2$.

Comme $x'(0) = 0 \iff K\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\times 0} + 2 = 0 \iff K + 2 = 0 \iff K = -2$, on a finalement pour tout t positif :

$$x'(t) = 2 - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}$$

b. Calcul de $x(t)$: d'après la question précédente x est une primitive sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto 2 - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}$, soit :

$x(t) = 2t - 2 \times \dfrac{1}{-\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + K' = 2t + 16\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + K'$ avec $K' \in \mathbb{R}$.

Comme on sait que $x(0) = 0$, alors $16 + K' = 0 \iff K' = -16$.

Conclusion : la fonction solution de (E) est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}$$

3. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 2$.

Donc V = 2.

La vitesse v du chariot est inférieure ou égale à 90 % de V si

$v(t) \leqslant 0,9V \iff -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} + 2 \leqslant 0,9 \times 2 \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} \geqslant 0,1 \iff -\frac{1}{8}t \geqslant \ln 0,1 \iff \frac{1}{8}t \leqslant \ln 10 \iff t \leqslant 8\ln 10 \approx 18,4$ secondes.

4. La distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes est :

$$x(30) = 2 \times 30 - 16 + 16\mathrm{e}^{-\frac{30}{8}} x(30) = 44 + 16\mathrm{e}^{s} - 154x(30) \approx 44,4$$

En 30 secondes le chariot a parcouru environ 44,4 mètres à 1 décimètre près.