# ∽ Correction du sujet Métropole S juin 2006 ∽

## Exercice 1

On ne demandait pas de justification ; celles-ci sont données à but pédagogique

1. L'équation $2x+2y-z-11=0$ est l'équation d'un plan $\mathscr{P}$.
   - $2x_A+2y_A-z_A-11 = 2\times2+2\times4-1-11=0$ donc A appartient à $\mathscr{P}$.
   - $2x_B+2y_B-z_B-11 = 2\times0+2\times4-(-3)-11=0$ donc B appartient à $\mathscr{P}$.
   - $2x_C+2y_C-z_C-11 = 2\times3+2\times1-(-3)-11=0$ donc C appartient à $\mathscr{P}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les trois points A, B et C ne sont pas alignés et appartiennent au plan $\mathscr{P}$, donc ce plan est le plan (ABC). L'affirmation est donc **vraie**.
2. $2x_E+2y_E-z_E-11 = 2\times3+2\times2-(-1)-11=0$ donc E appartient à (ABC).

   Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Alors : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=-4+0-4\neq0$

   donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux. Le point E n'est donc pas le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). L'affirmation est **fausse**.
3. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4+0-4=0$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (AB) et (CD) aussi. L'affirmation est **vraie**.
4. Le point C n'appartient pas à la droite dont on donne la représentation paramétrique. En effet, si c'était le cas, il existerait un réel $t$ tel que :
   $\left\{\begin{array}{rcr}-1+2t&=&3\\-1+t&=&1\\1-\ t&=&-3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}t&=&2\\t&=&2\\t&=&4\end{array}\right.$, ce qui est impossible. Par conséquent, l'affirmation est **fausse**.
5. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\0\\-\frac{14}{5}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AI}$. Les deux vecteurs sont colinéaires, donc I appartient bien à la droite (AB). L'affirmation est **vraie**.

Il fallait donc répondre : **V – F – V – F – V**

## Exercice 2

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2\text{e}^{1-x}$.

   **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{e}^{1-x}=+\infty$ par le théorème de composition des limites. Comme on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, on en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$.

   Pour tout $x$, on a : $f(x)=\text{e}x^2\text{e}^{-x}=\text{e}\dfrac{x^2}{\text{e}^x}$.

   D'après le théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{e}^x}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\text{e}^x}=0$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

   L'axe $(Ox)$ est donc asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   **b.** $f$ est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables ;

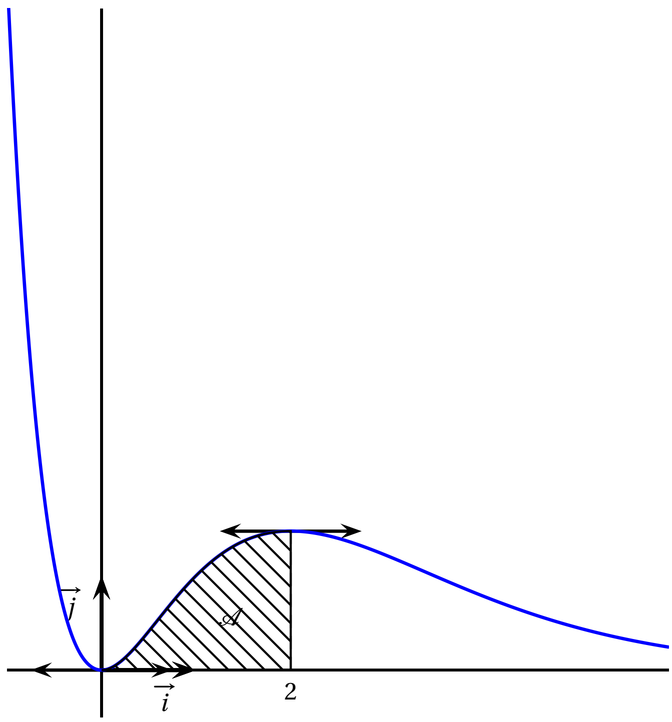
   pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=2x\text{e}^{1-x}-x^2\text{e}^{1-x}=(2x-x^2)\text{e}^{1-x}=\boxed{x(2-x)\text{e}^{1-x}}$.

**c.** Pour tout x, $e^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$ qui est strictement positif entre ses racines donc sur $]0\ ;\ 2[$, nul en 0 et 2 et négatif ailleurs.

On en déduit le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $2$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{4}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

Courbe :



**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}\,x$.

**a.** $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}\,x$.

Prenons $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1}(x) & = & x^{n+1} \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{1-x}\end{array}\right.$. Alors : $\left\{\begin{array}{lcl} u'_{n+1}(x) & = & (n+1)x^n \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{1-x}\end{array}\right.$.

$u_{n+1}$ et $v$ ont des dérivées continues donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties.

On a : $I_{n+1} = \int_0^1 u_{n+1}(x)v'(x)\mathrm{d}\,x = [u_{n+1}(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'_{n+1}(x)v(x)\mathrm{d}\,x$ $= \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^N\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}\,x = -1+(n+1)I_n$.

Par conséquent, pour tout n, on a : $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n - 1}$.

**b.** La même formule d'intégration par parties donne :

$I_1 = \int_0^1 x^1\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}\,x = [-x\mathrm{e}^{1x}]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{1x}\mathrm{d}\,x = -1+\left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 = -1+(-1+\mathrm{e}) = \boxed{\mathrm{e}-2}$.

En appliquant la formule précédente, on trouve : $I_2 = 2I_1 - 1 = \boxed{2\mathrm{e}-5}$.

**c.** On remarque que $I_2 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\,x$ donc comme $f$ est une fonction positive, $I_2$ représente l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe $(Ox)$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

**3.** **a.** Pour tout $x$ de $[0\,;1]$, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant -x \leqslant 0$, d'où $0 \leqslant 1-x \leqslant 1$ qui donne $1 \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}$ (en appliquant la fonction exponentielle qui est croissante) et finalement $x^n \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}x^n$ (en multipliant par $x^n$ qui est positif).

**b.** En utilisant les propriétés de l'intégrale, on obtient :

$\int_0^1 x^n\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}x^n\mathrm{d}x$ soit $\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.

Par conséquent : $\boxed{\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}}$.

Quand $n$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$ tendent vers 0 donc $I_n$ tend aussi vers 0 (théorème des gendarmes). $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

## Exercice 3 (pour ceux n'ayant pas choisi la spécialité)

**1.** **a.** Soit $z$ un nombre complexe non nul. $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ donc d'après les prérequis, $\arg\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 + 2k\pi$. Par conséquent : $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$.

Alors, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ non nuls :

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) =$
$\arg(z) + (-\arg(z')) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$.

**b.** Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

Alors : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ (d'après le prérequis) $= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (d'après la relation de Chasles).

**2.** Soit $f$ l'application de $P\setminus\{O\}$ dans $P\setminus\{O\}$ qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ avec $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

**a.** Pour tout $z \neq 0$, $\arg(z') = \arg\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = -\arg(\overline{z}) = \arg(z) + 2k\pi$.

$\boxed{\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi}$.

On en déduit que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) + 2k\pi$ donc $M$ et $M'$ appartiennent à une **même demi-droite d'origine** $O$.

**b.** $f(M) = M$ équivaut à $\dfrac{1}{\overline{z}} = z$ donc à $z\overline{z} = 1$ c'est-à-dire à $|z|^2 = 1$ donc à $|z| = 1$.

$\boxed{\text{L'ensemble des points invariants par } f \text{ est le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1}$.

**c.** Pour tout $z \neq 0$ :

$$\frac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \frac{\dfrac{1}{\overline{z}}-1}{\dfrac{1}{\overline{z}}-\mathrm{i}} = \frac{1-\overline{z}}{1-\mathrm{i}\overline{z}} = \frac{1-\overline{z}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i}-\overline{z}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\overline{z-1}}{\overline{z-\mathrm{i}}} = \frac{1}{\mathrm{i}}\overline{\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}$$

donc $\boxed{\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}}$

On en déduit que : $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right) + \arg\left(\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}\right) =$

$\arg(-\mathrm{i}) - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) + 2k\pi$.

**3.** **a.** Soit $z$ tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$. (donc $M \neq U$ et $M \neq V$).

$M$ appartient à la droite $(UV)$ privée de $U$ et $V$ si et seulement si $(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MV}) = k\pi$ c'est-à-dire $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = k\pi$ donc si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est réel non nul.

**b.** $M(z)$ est un point de la droite $(UV)$ privée de $U$ et $V$ si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = k\pi$ (d'après la question précédente) donc $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$ c'est-à-dire $(\overrightarrow{M'V}, \overrightarrow{M'U}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$.

$M'$ décrit alors le cercle de diamètre $[UV]$, privé des points $U$, $V$ et $O$.

## Exercice 3 (pour ceux ayant choisi la spécialité)

**Partie A :**

1. **Théorème de Bézout :** Deux entiers relatifs $x$ et $y$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers $u$ et $v$ tels que $ux + vy = 1$.

   **Théorème de Gauss :** Soient trois entiers relatifs $a$, $b$ et $c$. Si $a$ divise $bc$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a$ divise $c$.

2. **Démontrons le théorème de Bézout :**

   On suppose que $a$ et $b$ sont premiers entre eux et que $a$ divise $bc$.

   Comme $a$ et $b$ sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe $u$ et $v$ relatifs tels que $ua + vb = 1$.

   Alors : $uac + vbc = c$. Comme $a$ divise $bc$, il existe $k$ relatif tel que $bc = ka$.

   On en déduit : $uac + kav = c$ donc $a(uc + kv) = c$. $uc + kv$ est un entier relatif (somme et produit de relatifs) donc $a$ divise $c$.

**Partie B :**

On considère le système $(S)$ $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 13 & (19)\\ n & \equiv & 6 & (12)\end{array}\right.$

1. 19 est un nombre premier donc 19 et 12 sont premiers entre eux; d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $19u+12v=1$.
   On pose alors $N = 13\times 12v + 6\times 19u$.
   $N = 13(1-19u)+6\times 19u = 13-1319u+6\times 19u \equiv 13(19)$.
   $N = 13\times 12v+6\times(1-12v) = 13\times 12v+6-6\times 12v \equiv 6(12)$.
   $N$ **est bien solution du système** $S$.
2. **a.** Soit $n_0$ une solution de $(S)$.
   $n$ est solution de $(S)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 13 & (19)\\ n & \equiv & 6 & (12)\end{array}\right.$ c'est-à-dire
   $\left\{\begin{array}{lcllll} n & \equiv & 13 & \equiv & n_0 & (19)\\ n & \equiv & 6 & \equiv & n_0 & (12)\end{array}\right.$
   donc $(S)$ équivaut à $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19)\\ n & \equiv & n_0 & (12)\end{array}\right.$.

   **b.** • Si $n\equiv n_0(12\times 19)$ alors il est clair que $n\equiv n_0(19)$ et $n\equiv n_0(12)$ donc que $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19)\\ n & \equiv & n_0 & (12)\end{array}\right.$.
   • **Réciproquement :**
   Si $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19)\\ n & \equiv & n_0 & (12)\end{array}\right.$, alors il existe $k$ et $k'$ entiers relatifs tels que $n-n_0=19k$ et $n-n_0=12k'$ donc $19k=12k'$.
   19 divise donc $12k'$. Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $k'$ donc $k'=12k''$, $k''\in\mathbb{Z}$. Alors $n-n_0 = 12\times 19k''$ donc $n\equiv n_0(12\times 19)$.
   On a montré que $\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & n_0 & (19)\\ n & \equiv & n_0 & (12)\end{array}\right.$ équivaut à $n\equiv n_0\ (12\times 19)$.
3. **a.** Appliquons l'algorithme d'Euclide :
   On a successivement :
   $19 = 1\times 12+7$
   $12 = 7\times 1+5$
   $7 = 5\times 1+2$
   $5 = 2\times 2+1$
   d'où $1 = 5-2\times 2 = 5-2(7-5\times 1) = 5\times 3-2\times 7 = (12-7)\times 3-2\times 7 = 12\times 3-7\times 5 = 12\times 3-(19)12)\times 5 = \boxed{12\times 8-19\times 5}$.
   Un couple $(u\,;\,v)$ est : $\boxed{(u\,;\,v)=(-5\,;\,8)}$.
   Alors $\boxed{N = 13\times 12\times 8+6\times 19\times(-5) = \boxed{678}}$.

   **b.** $N=678$ est une solution de $S$. D'après la question 2$b$), les solutions de $(S)$ sont tous les nombres $n$ tels que $n\equiv N\ (12\times 19)$ c'est-à-dire $n\equiv 678\ (228)$. (car $12\times 19=228$)
   $\boxed{\mathscr{S} = \{678+228k,\ k\in\mathbb{Z}\}}$
4. Soit $n$ un entier tel que, si on le divise par 12, le reste est 6 et si on le divise par 19, le reste est 13. $n$ est donc une solution de $(S)$. Alors $n\equiv 678\ (228)\equiv 222\ (228)$. Le reste $r$ de la division de $n$ par $228 = 12\times 19$ est $\boxed{222}$.

## Exercice 4

1. Notons $C$ l'évènement « le ballon est crevé ». Alors $p(C)=0,2$.
   **a.** Comme les tirs sont indépendants la probabilité que la ballon soit intact au bout de deux tirs est $(1-p(C))^2 = 0,8^2 = 0,64$.
   **b.** Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon. L'évènement contraire est : « deux tirs ne suffisent pas », autrement dit, le ballon n'est pas crevé au bout de deux tirs. C'est l'évènement contraire de celui étudié au a). Sa probabilité vaut 1 - 0,64 = 0,36.

**c.** Calculons la probabilité $p_n$ que $n$ tirs suffisent pour crever le ballon. L'évènement contraire est « le ballon n'est pas crevé au bout de $n$ tirs », de probabilité $(p(\overline{C})^n = 0,8^n$ (car les tirs sont indépendants).

Par conséquent : $\boxed{p_n = 1 - 0,8^n}$.

**d.** $p_n > 0,99$ équivaut à $1 - 0,8^n > 0,99$ c'est-à-dire à $0,8^n < 0,01$.

La fonction ln étant croissante, on trouve $n \ln 0,8 < \ln 0,01$ donc $n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ soit $\boxed{n \geqslant 21}$.

$\boxed{\text{Il faut que } n \geqslant 21 \text{ pour que } p_n > 0,99}$.

**2.** Pour chaque valeur de $k$ compris entre 1 et 4, la probabilité de crever le ballon est la probabilité $p_k$, calculée en 1) c) : $p_k = 1 - 0,8^k$.

Le dé n'est pas pipé donc chaque face a la même probabilité de sortie égale à $\dfrac{1}{4}$.

La probabilité de crever le ballon est : $\dfrac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \boxed{0,4096}$.

**3.** **a.** Les fréquences sont : $f_1 = \dfrac{58}{200} = \dfrac{29}{100}$ ; $f_2 = \dfrac{49}{200}$ ; $f_3 = \dfrac{52}{200} = \dfrac{13}{50}$ et $f_4 = \dfrac{41}{200}$.

**b.** Alors $d^2 = \sum_{k=1}^{4} \left(f_k - \dfrac{1}{4}\right)^2 = \boxed{0,00375}$.

**c.** On constate que $d^2 < D_9$.

$\boxed{\text{Au risque de 10\%, on peut considérer que le dé n'est pas pipé.}}$