

Corrigé du baccalauréat S Métropole & La Réunion
septembre 2009

EXERCICE 1

(6 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. Quel que soit le réel x , $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \ln(x^2 + 4)$ existe.

La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto x^2 + 4$, dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans $]4; +\infty[$ et de la fonction $x \mapsto \ln x$ qui est dérivable sur $]4; +\infty[$. La fonction f est donc dérivable sur $]0; +\infty[$.

Comme $(\ln \circ u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = x^2 + 4$ on obtient $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$ quel que soit $x \in]0; +\infty[$.

Le numérateur et le dénominateur étant positifs, le quotient est positif, donc la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$. La dérivée n'étant nulle qu'en 0, on peut affirmer que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2. a. La fonction g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2x}{x^2 + 4} - 1 = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x^2 + 4}$.

Le signe de $g'(x)$ est donc celui du trinôme $-x^2 + 2x - 4$.

Son discriminant $\Delta = 4 - 16 = -12$ donc $g'(x)$ est du signe du coefficient de x^2 donc négatif pour tout $x \in]0; +\infty[$.

La fonction g est donc décroissante sur $]0; +\infty[$.

- b. • la fonction g est continue, car dérivable sur $[2; 3]$;

• g est décroissante sur $[2; 3]$;

• $g(2) = \ln 8 - 2 \approx 0,07 > 0$ et $g(3) = \ln 13 - 3 \approx -0,4 < 0$;

Il existe donc un réel unique $\alpha \in [2; 3]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On trouve de même que $g(2,1) \approx 0,03$ et $g(2,2) \approx -0,03$. Donc $2,1 < \alpha < 2,2$.

Enfin $g(2,15) \approx 0,004$ et $g(2,16) \approx -0,006$.

Conclusion $\alpha \approx 2,2$ à 0,1 près.

- c. On a $g(x) = 0 \iff f(x) - x = 0 \iff f(x) = x$. Les deux équations sont équivalentes donc ont les mêmes solutions, en l'occurrence il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

PARTIE B

1. En résumé : verticalement vers \mathcal{C} , horizontalement vers Δ . Cf. la figure à la fin.

2. Cf. la figure à la fin.

3. a. Démonstration par récurrence :

— *Initialisation* : on a bien $1 \leq u_0 \leq \alpha$ puisque $u_0 = 1$; la relation est vraie au rang 0.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que : $1 \leq u_n \leq \alpha$.

Par croissance de la fonction f , on a :

$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha) \iff \ln 5 \leq u_{n+1} \leq \alpha$. Comme $1 < \ln 5$, on a bien :

$1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n au moins égal à 1, elle est vraie au rang $n + 1$, elle est donc vraie pour tout naturel n , $1 \leq u_n \leq \alpha$.

b. On démontre facilement ($u_0 \leq u_1$, puis $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$) que la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par α d'après la question précédente, elle converge vers $\ell \leq \alpha$.

c. Or la fonction f est continue donc en particulier en ℓ , on a $f(u_n) = u_{n+1} \Rightarrow f(\ell) = \ell$ (par limite en plus l'infini). On sait que la seule solution de cette équation est α .

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

EXERCICE 2 :

(5 points)

Commun à tous les candidats

1. \mathcal{D} a pour vecteur normal $\vec{n}(1; 1; 0)$;

\mathcal{D}' a pour vecteur normal $\vec{n}'(0; 1; 1)$: ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les plans ne sont pas parallèles; leur intersection est donc une droite \mathcal{D} dont tous les points de coordonnées $(x; y; z)$ vérifient :

$$\begin{cases} x+y-1 = 0 \\ y+z-2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-y \\ z = 2-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-t \\ z = 2-t \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

\mathbb{R}) qui est une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} .

2. a. La droite \mathcal{D} contient le point $(1; 0; 2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1; 1; -1)$ et ce vecteur est normal au plan \mathcal{R} .

Une équation de ce plan est donc : $M(x; y; z) \in \mathcal{R} \iff -x+y-z=0 \iff x-y+z=0$.

b. \mathcal{R} et \mathcal{D} étant perpendiculaires sont sécants en un point dont les coordonnées vérifient les équations de \mathcal{D} et de \mathcal{R} soit :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ z = 2-t \\ y = t \\ x-y+z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-t \\ z = 2-t \\ y = t \\ 1-t-t+2-t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-t \\ z = 2-t \\ y = t \\ 1 = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ 1 = t \end{cases}$$

Conclusion : I(0; 1; 1)

3. a. $A \in \mathcal{R} \iff -\frac{1}{2} - 0 + -\frac{1}{2} = 0$ qui est vrai;

$B \in \mathcal{R} \iff 1 - 1 + 0 = 0$ qui est vrai.

b. I étant le milieu de $[AA']$ et $[BB']$, le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme.

D'autre part : $\vec{IA}\left(-\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{IB}(1; 0; -1)$.

Donc $\vec{IA} \cdot \vec{IB} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Le parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires : c'est un losange

c. Le point S correspond bien au point de \mathcal{D} de paramètre -1

d. A, B, I, A' et B' sont des points de \mathcal{R} et I et S appartiennent à la droite \mathcal{D} , donc la droite (IS) est la hauteur issue de S de la pyramide L'aire du losange est égale au quadruple de l'aire

du triangle rectangle IAB. On a $IA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $IB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Donc aire $(ABA'B') = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{12}$.

La hauteur : $\vec{IS}(2; -2; 2)$, d'où $IS = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$.

Finalement $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} = \frac{1}{3} \times 12 = 4$.

EXERCICE 3 :**(4 points)**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

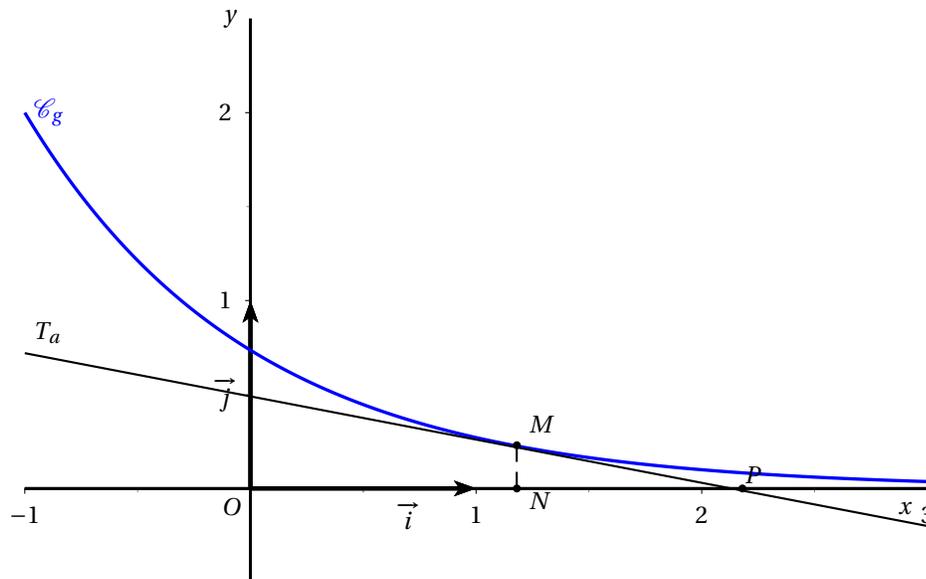
1. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = e^x$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y - e^a = e^a(x - a)$.

Elle coupe l'axe des abscisses au point d'ordonnée 0; donc $0 - e^a = e^a(x - a) \Leftrightarrow -1 = x - a \Leftrightarrow x = a - 1$ (car $e^a \neq 0$). On a donc $P(a - 1; 0)$.

2. On a $M(a; e^a)$ et $N(a; 0)$.

D'où $\overrightarrow{NP}(-1; 0)$ ce qui signifie que $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$.

PARTIE B

1. L'équation de la tangente est : $y - g(a) = g'(a)(x - a)$. Le point P d'ordonnée nulle est tel que $0 - g(a) = g'(a)(x - a) \Leftrightarrow x - a = -\frac{g(a)}{g'(a)} \Leftrightarrow x = a - \frac{g(a)}{g'(a)}$. (car $g'(a) \neq 0$)

2. On a $P\left(a - \frac{g(a)}{g'(a)}; 0\right)$ et $N(a; 0)$, d'où $\overrightarrow{NP}\left(-\frac{g(a)}{g'(a)}; 0\right)$.

Donc $\overrightarrow{NP} = \vec{i} \Leftrightarrow -\frac{g(a)}{g'(a)} = 1 \Leftrightarrow -g(a) = g'(a)$.

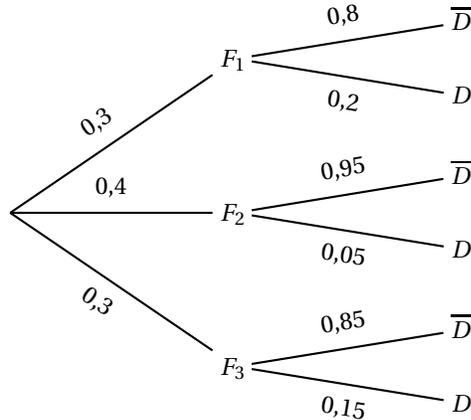
La fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$; on sait que les solutions de cette équation sont de la forme $y = Ce^{-x}$. Avec la condition initiale $y(0) = 2$, on obtient $2 = Ce^{-0} \Leftrightarrow C = 2$.

Conclusion : il existe bien une seule fonction vérifiant les deux conditions données, c'est la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^{-x}$.

EXERCICE 4 :**(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. F_1 désigne l'évènement : « le pneu provient du fournisseur 1 ».
 D désigne l'évènement : « le pneu présente un défaut ».
 On a l'arbre suivant :



D'après le théorème des probabilités totales :

$$p(\overline{D}) = p(F_1 \cap \overline{D}) + p(F_2 \cap \overline{D}) + p(F_3 \cap \overline{D}) \text{ soit}$$

$$p(\overline{D}) = 0,3 \times 0,8 + 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,85 = 0,24 + 0,38 + 0,255 = 0,875. \text{ On a}$$

$$p_{\overline{D}}(F_2) = \frac{p(\overline{D} \cap F_2)}{p(\overline{D})} = \frac{0,4 \times 0,95}{0,875} = \frac{0,38}{0,875} \approx 0,434.$$

2. La variable aléatoire donnant le nombre de pneus ayant un défaut suit une loi binomiale de probabilité $1 - 0,875 = 0,125$ avec $n = 10$.
 La probabilité cherchée est donc égale à :

$$p(D \leq 1) = p(D = 0) + p(D = 1) = 0,125^0 \times 0,875^{10} + \binom{10}{1} \times 0,125^1 \times 0,875^9 =$$

$$0,875^{10} + 10 \times 0,125 \times 0,875^9 \approx 0,6388 \approx 0,639 \text{ au millième près}$$

3. a. On a $p(500 \leq X \leq 1000) = \int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^{500} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{500}^{1000} \lambda e^{-\lambda x} dx = [e^{-\lambda x}]_{500}^{1000} =$
 $-e^{-1000\lambda} - (-e^{-500\lambda}) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}.$

b. On a donc $p(500 \leq X \leq 1000) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-500\lambda} - (e^{-500\lambda})^2 - \frac{1}{4} = 0.$

En posant $x = e^{-500\lambda}$, l'équation à résoudre s'écrit $x - x^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$(x - \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$ Il reste à résoudre :

$e^{-500\lambda} = \frac{1}{2}$ soit d'après la croissance de la fonction \ln , $-500\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$-500\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{500} \approx 0,00138 \approx 0,0014.$

EXERCICE 4 :**(5 points)****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. a. $2009 = 11 \times 182 + 7$. Le reste est donc égal à 7.
- b. On a $2^5 = 32 = 11 \times 2 + 10$, donc $2^5 \equiv 10 \pmod{11}$, ou $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ donc $(2^5)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{11} \iff 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.
Le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11 est égal à 1.
- c. On a $2^{2009} = 2^{10 \times 200 + 9} = 2^{10 \times 100} \times 2^9 = (2^{10})^{100} \times 2^9$.
Or $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, donc $(2^{10})^{100} \equiv 1^{100} \pmod{11}$;
D'autre part $2^9 = 2^5 \times 2^4$. On a vu que $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ et $2^4 = 16 \equiv 5 \pmod{11}$, donc par produit $2^9 = 2^5 \times 2^4 \equiv -5 \pmod{11}$.
Finalement $2^{2009} \equiv 1 \times (-5) \pmod{11}$ ou $2^{2009} \equiv -5 \pmod{11}$ et comme $2009 \equiv 7 \pmod{11}$, par somme on obtient finalement :
 $2^{2009} + 2009 \equiv -5 + 7 \pmod{11}$ ou encore $2^{2009} + 2009 \equiv 2 \pmod{11}$.
Le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11 est égal à 2.
2. a. $A_{n+1} = 2^{n+1} + p$.
Tout diviseur de A_n et A_{n+1} divise leur différence $2^{n+1} + p - (2^n + p) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$.
En particulier d_n divise 2^n .
- b. n étant supérieur à zéro, 2^n est pair, donc $A_n = 2^n + p$ a la même parité que p .
- c. D'après la question précédente A_n et A_{n+1} ont la parité de p . Donc
si p est pair A_n et A_{n+1} et par conséquent leur P. G. C. D. le sont aussi;
si p est impair A_n et A_{n+1} et par conséquent leur P. G. C. D. le sont aussi; D'après le résultat précédent A_{2009} et A_{2010} sont impairs car 2009 l'est et leur P. G. C. D. l'est aussi.
Or on a vu que ce P. G. C. D., d_n divisait 2^n . Or tous les diviseurs de 2^n sont pairs sauf 1 seul diviseur impair.
Conclusion : le P. G. C. D. de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$ est égal à 1 : ils sont premiers entre eux.

ANNEXE DE L'EXERCICE 1
(à rendre avec la copie)

